Cinemática Direta

4º Engenharia de Controle e Automação

FACIT / 2009

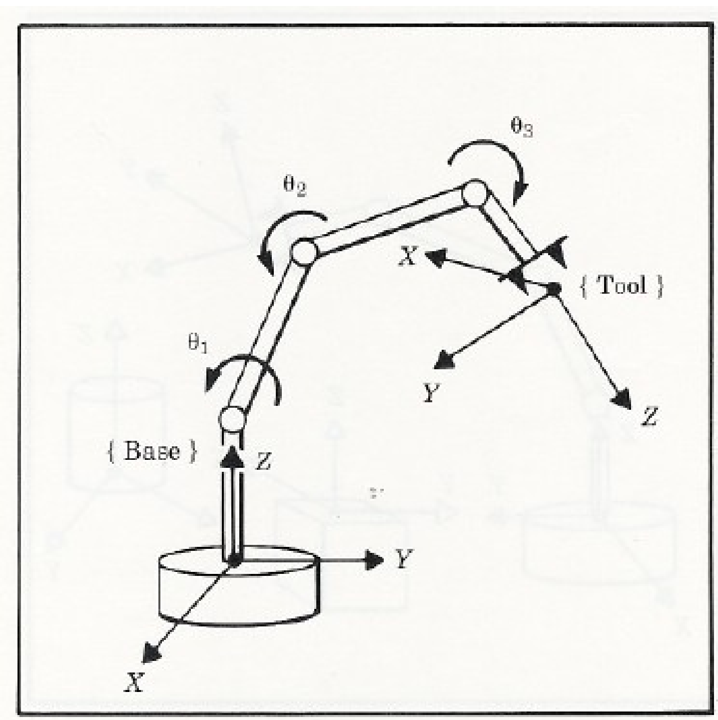
Prof. Maurílio J. Inácio

Cinemática Direta

- Cinemática do manipulador
  - Cinemática é ciência que trata o movimento sem considerar as forças que o causam.
  - Na cinemática são estudados: posições, velocidades, acelerações, etc.
  - Em robótica, o estudo da cinemática do robô manipulador refere-se as propriedades geométricas e de base temporal do movimento.
  - No estudo da cinemática será considerado posições e orientações de um manipulador em situações estáticas.
  - Para descrever a geometria de um manipulador fixa-se *frames* às várias partes de um manipulador e descreve-se a relação entre cada um deles.

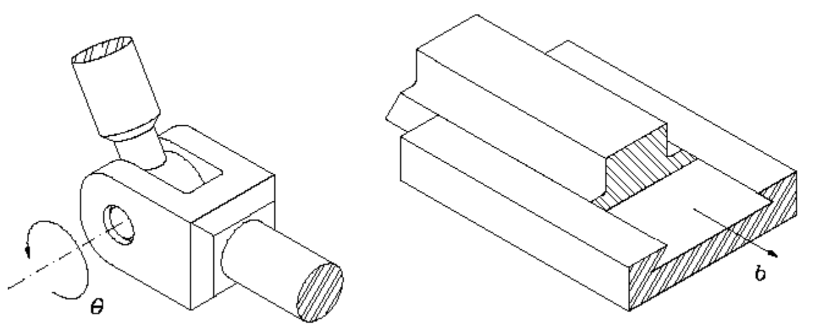
Cinemática Direta

- Cinemática do manipulador
  - O objetivo do estudo da cinemática é descrever a posição e orientação do efetuador relativo a base do manipulador, como uma função da variáveis estabelecidas em cada uma das junções.



Cinemática Direta

- Cinemática do manipulador
  - Um manipulador pode ser visto como um conjunto de corpos conectados em cadeia por juntas (*joint*). Estes corpos são chamados de elos (*links*).
  - Manipuladores são construídos geralmente com juntas que exibem apenas um grau de liberdade. Muitos manipuladores tem juntas rotacionais (*revolute*) ou juntas deslizantes (*prismatic*).



Cinemática Direta

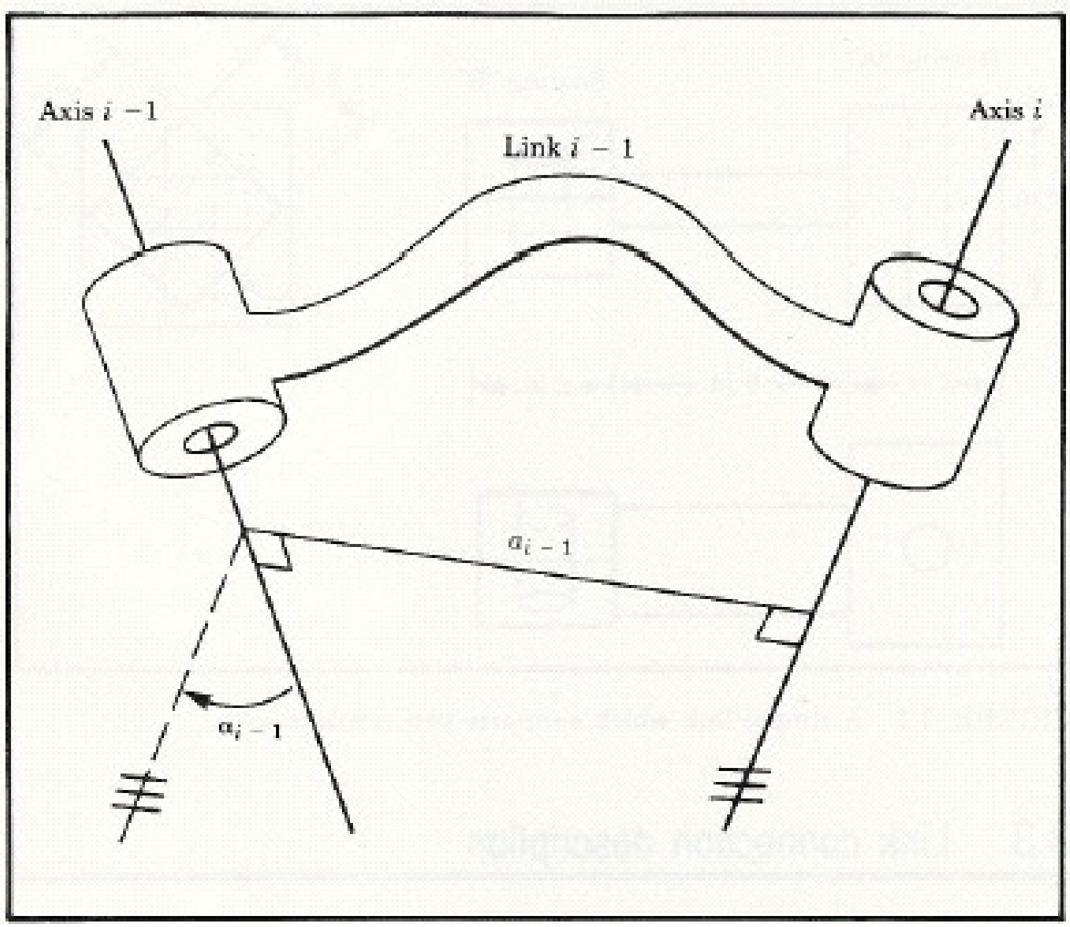
- Cinemática do manipulador
  - É raro um mecanismo que tenha juntas com mais de um grau de liberdade. Nesse caso, a junta pode ser modelada como *n* juntas conectadas por *n-1* elos de comprimento zero.
  - Os elos são numerados a partir da base imóvel do manipulador, chamado elo 0. A primeira parte móvel será o elo 1 e assim por diante até a parte final do manipulador (efetuador).
  - Um elo de um robô manipulador típico tem muitos atributos. Porém, na cinemática um elo será considerado somente como um corpo rígido que define a relação entre dois eixos de juntas vizinhas.

Cinemática Direta

- Parâmetros de elos e juntas
  - Eixos de junta são definidos por linhas no espaço, ou um vetor de direção, o qual indica quanto a junta ***i*** esta rotacionada e transladada relativa a junta ***i-1***.
  - Entre duas juntas existe uma distância definida como $\boldsymbol{a_{i-1}}$ (afastamento entre duas juntas), que é a distância medida ao longo da normal comum a dois eixos de juntas consecutivas.
  - Entre elos existe uma torção definida como $\boldsymbol{\alpha_{i-1}}$ (ângulo entre o eixo ***i-1*** e eixo ***i***). Este ângulo é medido do eixo ***i-1*** para o eixo ***i***.

Cinemática Direta

- Parâmetros de elos e juntas

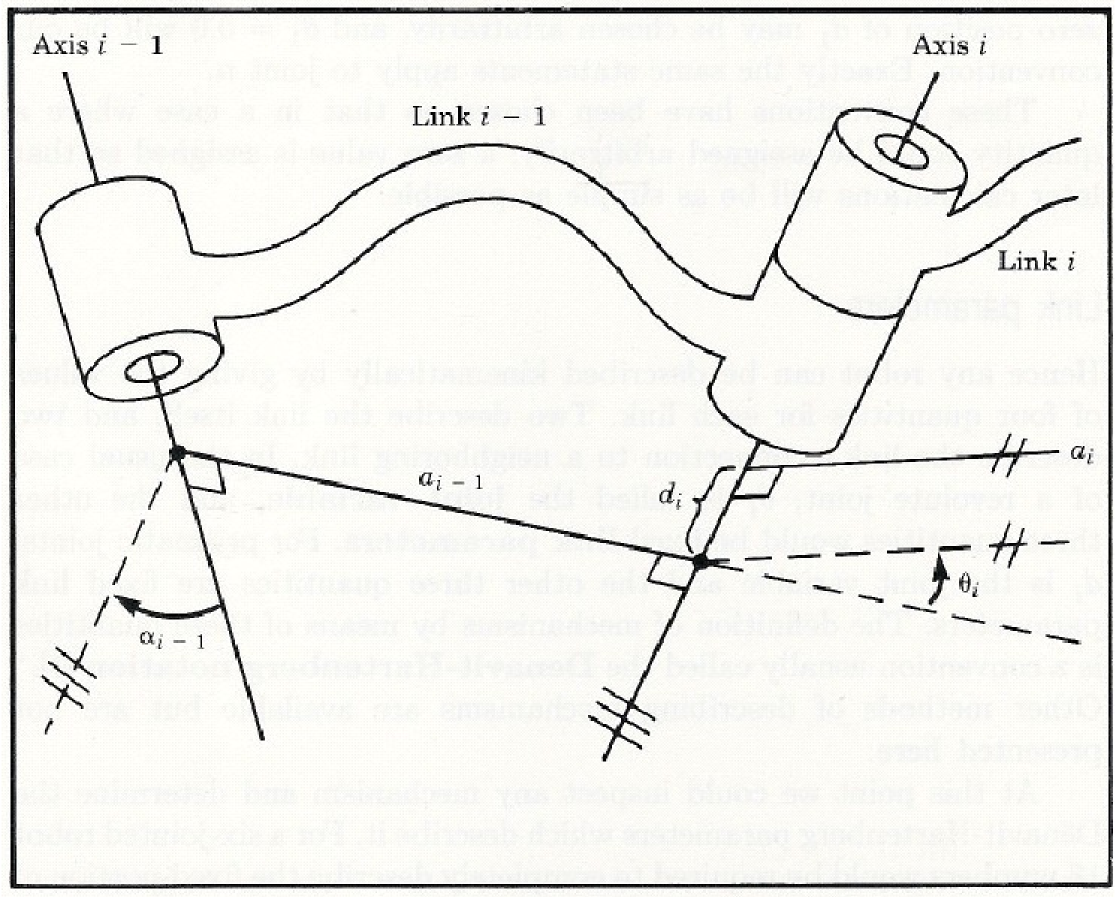


Cinemática Direta

- Parâmetros de elos e juntas
  - Dois parâmetros definem a interconexão entre dois elos.
  - O primeiro é chamado deslocamento (*offset*) de elo, definido como ***di*** , é a distância entre dois afastamentos de juntas consecutivos ($\boldsymbol{a_{i-1}}$ e $\boldsymbol{a_i}$), a qual é medida sobre o eixo ***i***.
  - O segundo é chamado ângulo de junta, definido por $\boldsymbol{\theta_i}$, ângulo formado por dois afastamento de juntas consecutivos ($\boldsymbol{a_{i-1}}$ e $\boldsymbol{a_i}$).
  - Para juntas rotacionais $\boldsymbol{\theta_i}$ é variável e ***di*** é nulo.
  - Para juntas prismáticas ***di*** é variável e $\boldsymbol{\theta_i}$ é nulo.

Cinemática Direta

- Parâmetros de elos e juntas



Cinemática Direta

- Notação de Denavit-Hartenberg
  - Um robô pode ser especificado ao se descrever os valores de 4 parâmetros para cada elo:
    - comprimento (a_{i-1}).
    - torção (α_{i-1}).
    - deslocamento (d_i).
    - ângulo (θ_i).
  - A definição da mecânica de um manipulador usando estes parâmetros segue a notação de Denavit-Hartenberg.
  - O modelo de D-H permite obter a posição e a orientação da ferramenta.

Cinemática Direta

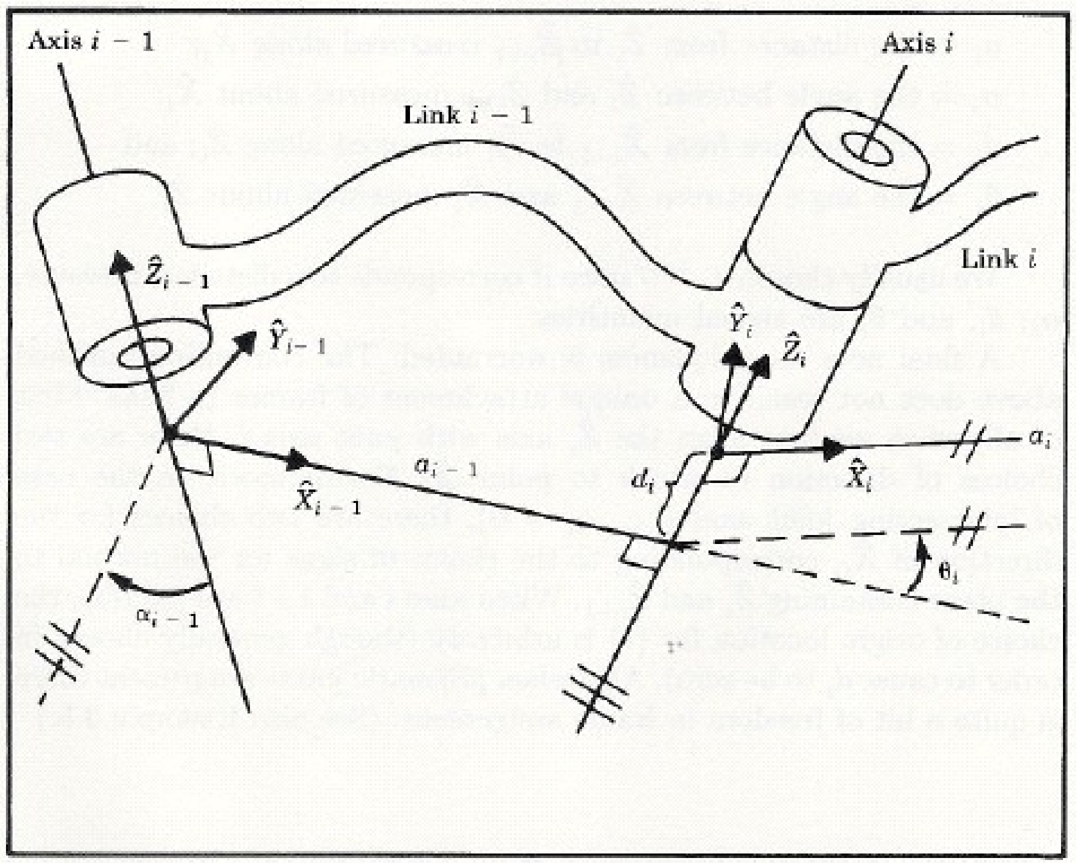
- Notação de Denavit-Hartenberg
  - O modelo D-H define completamente a cinemática do manipulador.
  - A Notação D-H especifica ainda que o comprimento e a torção de um elo ***i*** dependem das juntas adjacentes.
  - Com isso, os términos da cadeia ficam indefinidos.
  - Por convenção, define-se:
    - $a_0 = a_n = 0$
    - $\alpha_0 = \alpha_n = 0$

Cinemática Direta

- Convenção para fixação dos *frames*
  - *Frames* são numerados de acordo com o elo ao qual ele está ligado (*frame* **{*i*}** está ligado ao elo ***i***)
  - O eixo $\boldsymbol{Z_i}$ do *frame* **{*i*}** está alinhado como eixo da junta ***i***
  - A origem do *frame* **{*i*}** está localizada no ponto onde a perpendicular $\boldsymbol{a_i}$ intersecciona o eixo da junta ***i***
  - O eixo $\boldsymbol{X_i}$ do *frame* **{*i*}** está alinhado como a perpendicular $\boldsymbol{a_i}$ na direção de ***i*** para ***i+1***
  - $\boldsymbol{Y_i = Z_i \times X_i}$ (use regra da mão direita)

Cinemática Direta

- Convenção para fixação dos *frames*



Cinemática Direta

- Convenção para fixação dos *frames*
  - O *frame* ***{0}*** é escolhido de maneira arbitrária:
    - escolha o eixo $\boldsymbol{Z_0}$ alinhado com o $\boldsymbol{Z_1}$, de maneira que os *frames* ***{0}*** e ***{1}*** sejam iguais quando a variável da junta *1* for zero
    - Neste caso:
      - $\boldsymbol{a_0} = 0$
      - $\boldsymbol{\alpha_0} = 0$
      - e $\boldsymbol{d_1} = 0$ se a junta 1 for de rotação
      - ou $\boldsymbol{\theta_1} = 0$ se a junta 1 for prismática

Cinemática Direta

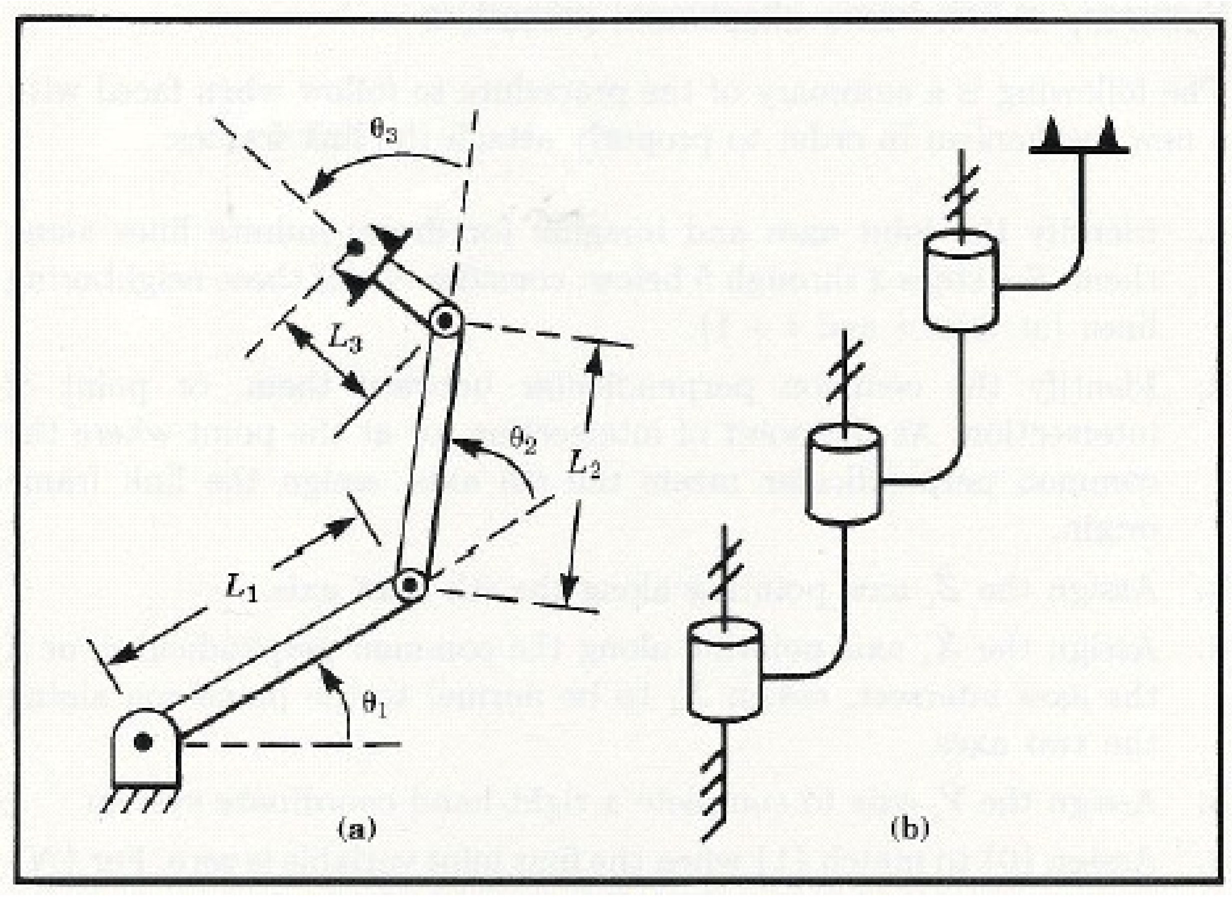
- Convenção para fixação dos *frames*
  - No caso do último frame (*frame* $\{n\}$)
    - Se a junta for de revolução:
      - escolha o eixo X_n para coincidir com o X_{n-1} quando $\theta_n = 0$
      - escolha a origem do frame $\{n\}$ de maneira que $d_n = 0$
    - Se a junta for prismática:
      - escolha o eixo X_n de maneira que $\theta_n = 0$
      - a origem do frame $\{n\}$ é a interseção de X_{n-1} e o eixo da junta n quando $d_n = 0$

Cinemática Direta

- Resumo das definições
  - $\boldsymbol{a_i}$: a distância entre os eixos $\boldsymbol{Z_i}$ e $\boldsymbol{Z_{i+1}}$ medida sobre o eixo $\boldsymbol{X_i}$
  - $\boldsymbol{\alpha_i}$: o ângulo entre os eixos $\boldsymbol{Z_i}$ e $\boldsymbol{Z_{i+1}}$ medido sobre o eixo $\boldsymbol{X_i}$
  - $\boldsymbol{d_i}$: a distância entre os eixos $\boldsymbol{X_{i-1}}$ e $\boldsymbol{X_i}$ medida sobre o eixo $\boldsymbol{Z_i}$
  - θ_i: o ângulo entre os eixos $\boldsymbol{X_{i-1}}$ e $\boldsymbol{X_i}$ medido sobre o eixo $\boldsymbol{Z_i}$

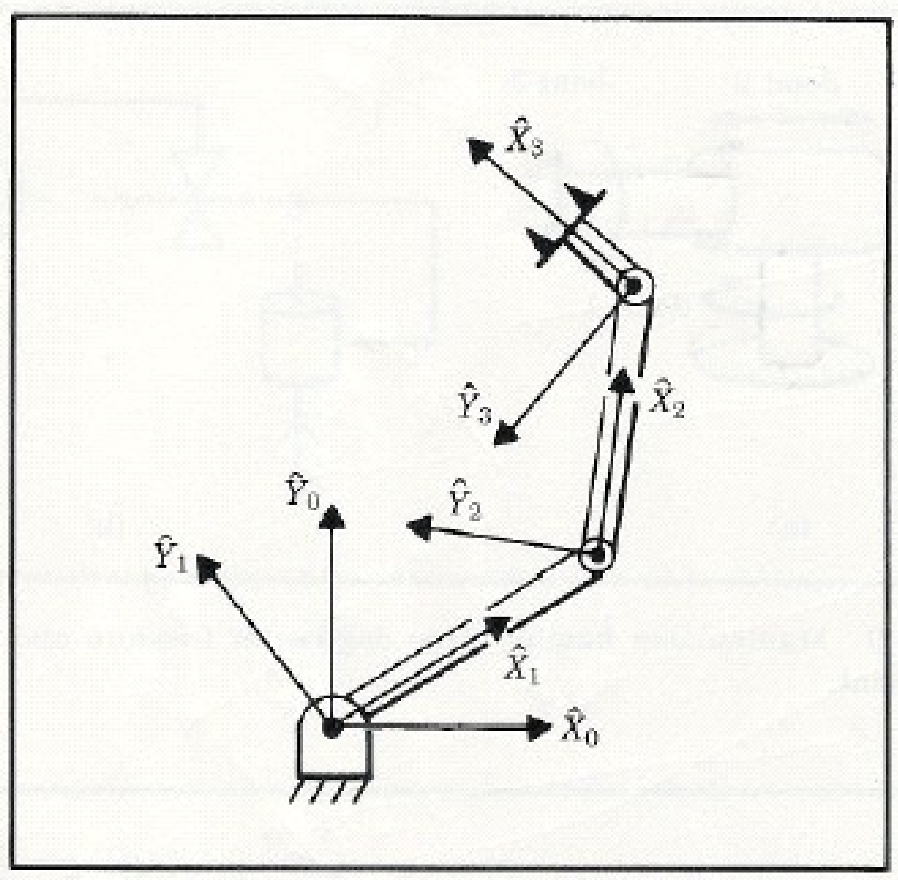
Cinemática Direta

- Exemplo 1: Robô manipulador RRR (3R)



Cinemática Direta

- Exemplo 1: Robô manipulador RRR (3R)
  - Definição dos *frames* dos elos



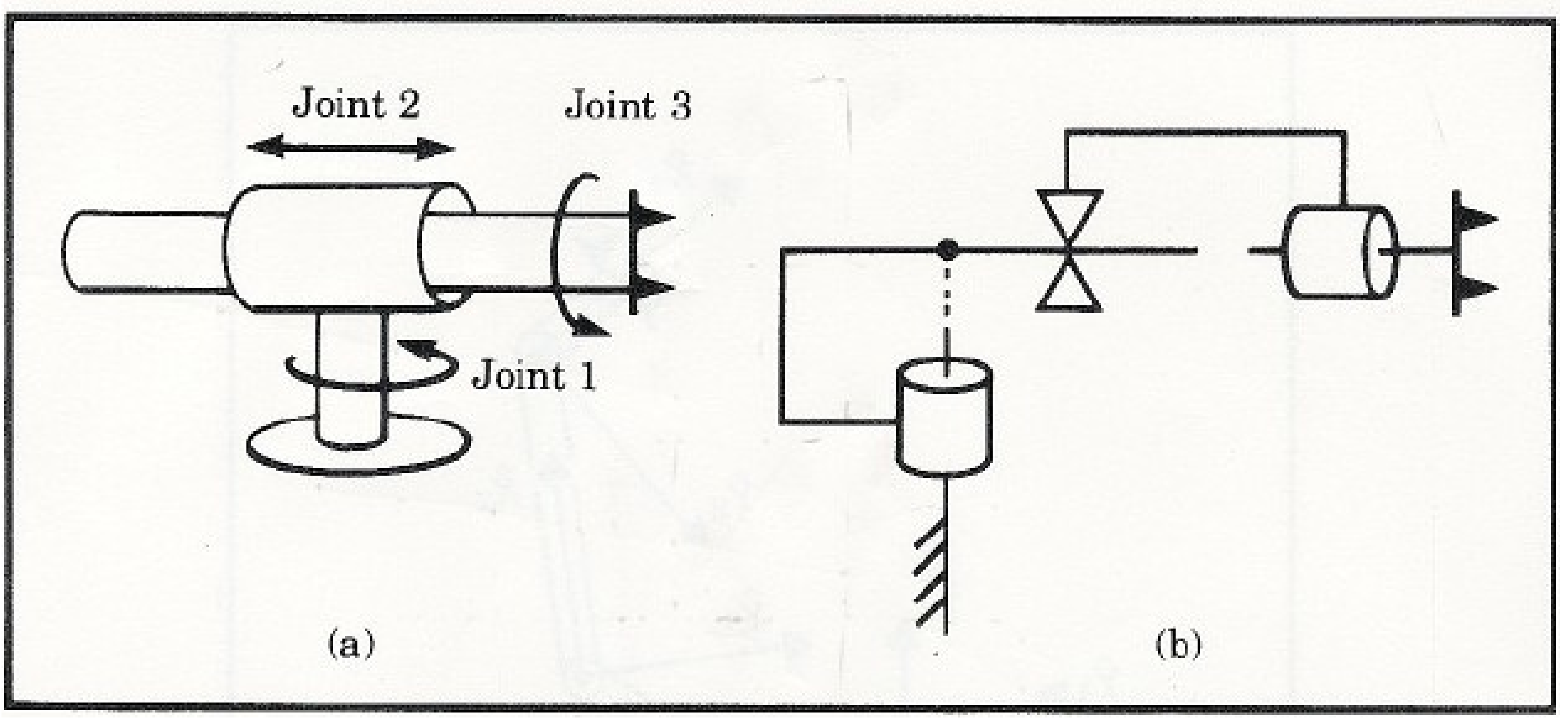
Cinemática Direta

- Exemplo 1: Robô manipulador RRR (3R)
  - Parâmetros dos elos

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

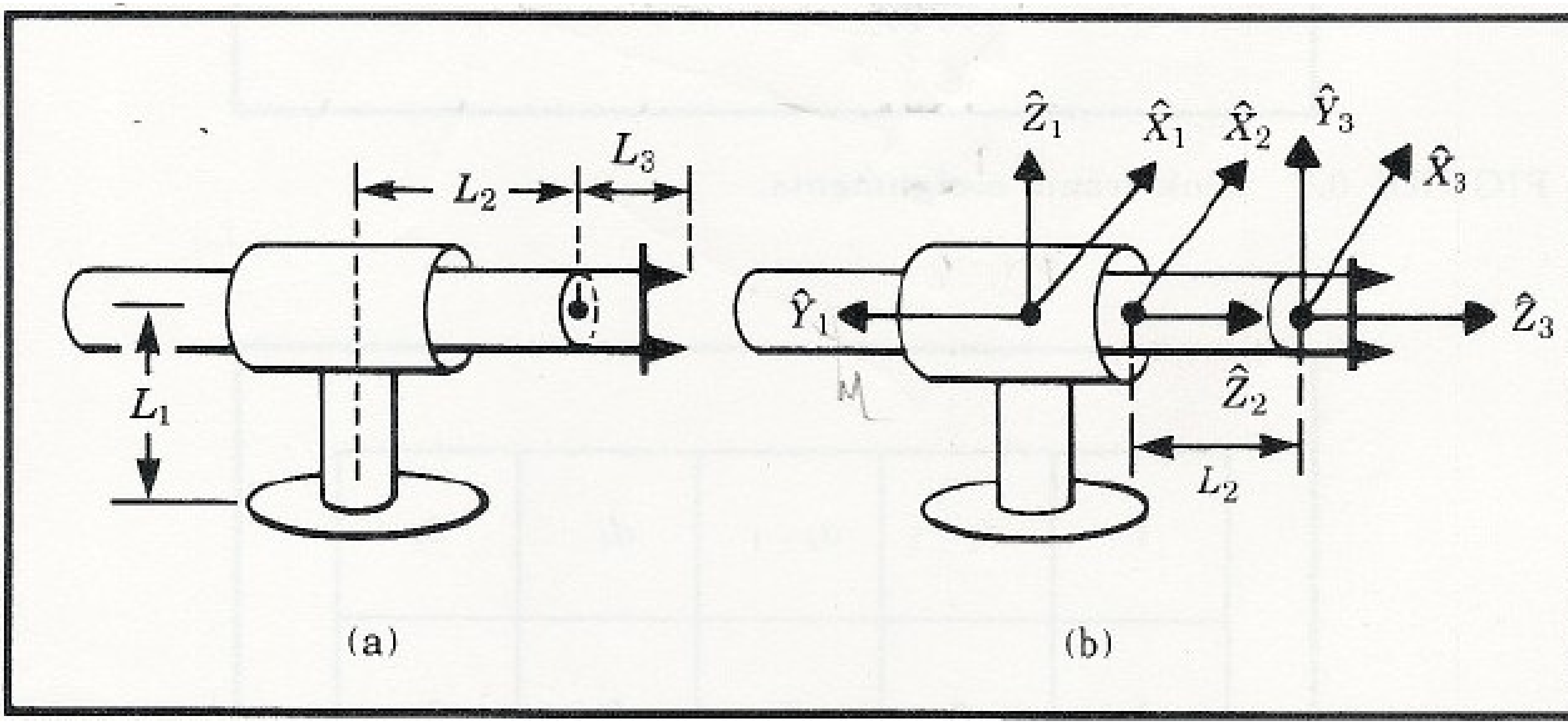
Cinemática Direta

- Exemplo 2: Robô manipulador RPR



Cinemática Direta

- Exemplo 2: Robô manipulador RPR
  - Definição dos *frames* dos elos



Cinemática Direta

- Exemplo 2: Robô manipulador RPR
  - Parâmetros dos elos

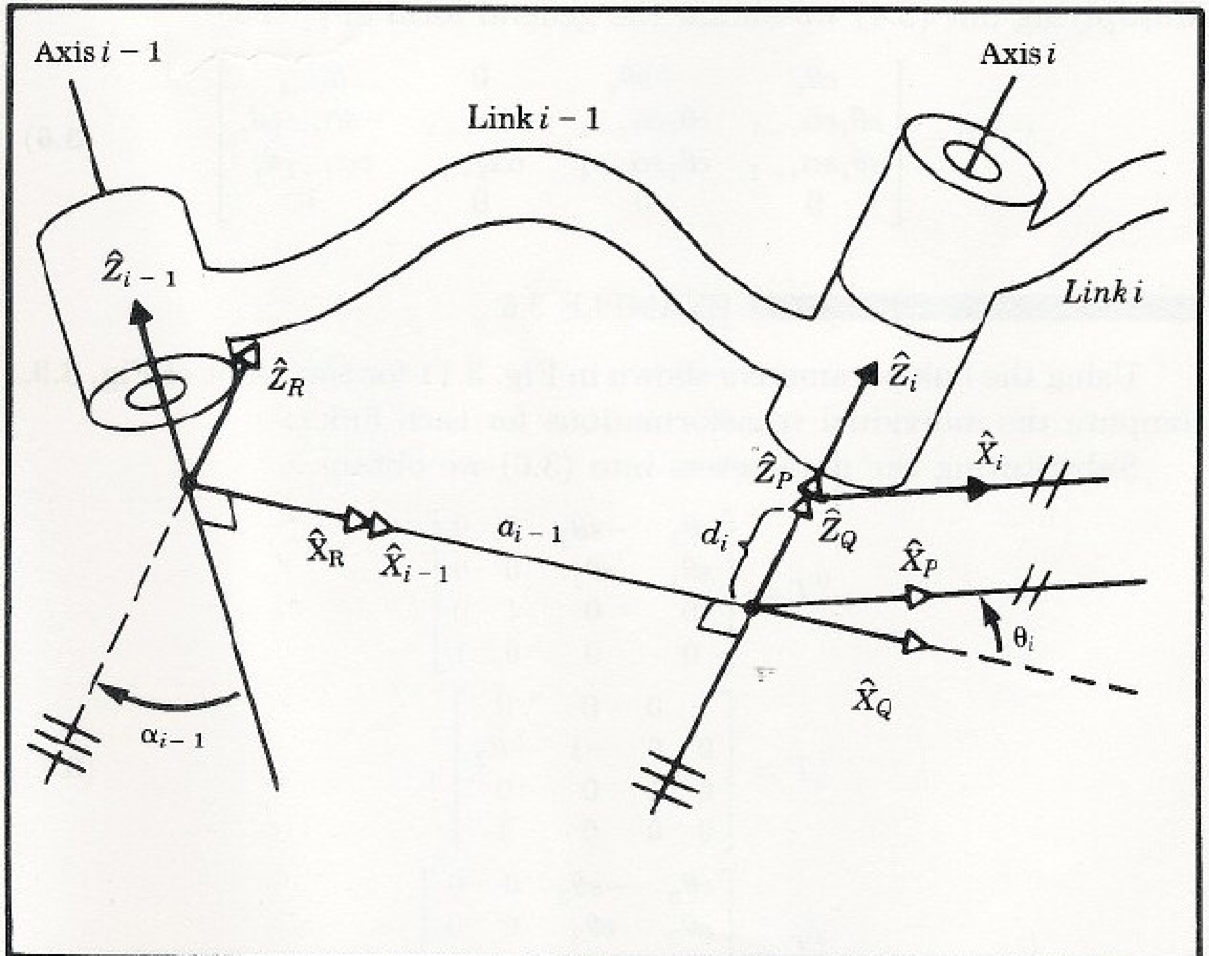
i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90º	0	d_2	0
3	0	0	L_2	θ_3

Cinemática Direta

- Derivando transformações de elos
  - É possível construir uma matriz de transformação que defina um *frame {i}* em relação ao *frame {i-1}*.
  - De forma geral, essa transformação será uma função dos quatro parâmetros do elo.
  - Para um dado robô, essa transformação será uma função de somente uma variável, os outros parâmetros serão fixos pelo projeto mecânico.
  - Problemas de cinemática são divididos em *n* subproblemas, onde cada subproblema é representado por uma matriz de transformação ${}^{i-1}_{i}T$

Cinemática Direta

- Derivando transformações de elos



Cinemática Direta

- Derivando transformações de elos
  - Dado um par de juntas *{i}* e *{i-1}* com os *frames* intermediários *P*, *Q* e *R*, a descrição de um vetor definido no *frame {i}* em relação ao *frame {i-1}* será dada por:

$$ {}^{i-1}P = {}^{i-1}_{R}T \; {}^{R}_{Q}T \; {}^{Q}_{P}T \; {}^{P}_{i}T \; {}^{i}P $$

  - Ou

$$ {}^{i-1}P = {}^{i-1}_{i}T \; {}^{i}P $$

  - Onde

$$ {}^{i-1}_{i}T = {}^{i-1}_{R}T \; {}^{R}_{Q}T \; {}^{Q}_{P}T \; {}^{P}_{i}T $$

Cinemática Direta

- Derivando transformações de elos
  - O *frame* ***R*** está rotacionado em relação ao *frame* *{**i-1**}* em um ângulo α_{i-1}; o *frame* ***Q*** está transladado em relação ao *frame* ***R*** por uma distância a_{i-1}; o *frame* ***P*** está rotacionado em relação ao *frame* ***Q*** em um ângulo θ_i e o *frame* ***{i}*** está transladado em relação ao *frame* ***P*** por um deslocamento d_i.
  - Ou seja:

$$ {}^{i-1}_{\ \ i}T = R_X(\alpha_{i-1})D_X(a_{i-1})R_Z(\theta_i)D_Z(d_i) $$

Cinemática Direta

- Derivando transformações de elos

$$
{}^{i-1}_{i}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_{i-1} & -sen\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & sen\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -sen\theta_i & 0 & 0 \\ sen\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{i-1}_{i}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -sen\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ sen\theta_i \cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i \cos\alpha_{i-1} & -sen\alpha_{i-1} & -sen\alpha_{i-1} d_i \\ sen\theta_i sen\alpha_{i-1} & \cos\theta_i sen\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Forma geral da matriz de transformação ${}^{i-1}_{i}T$

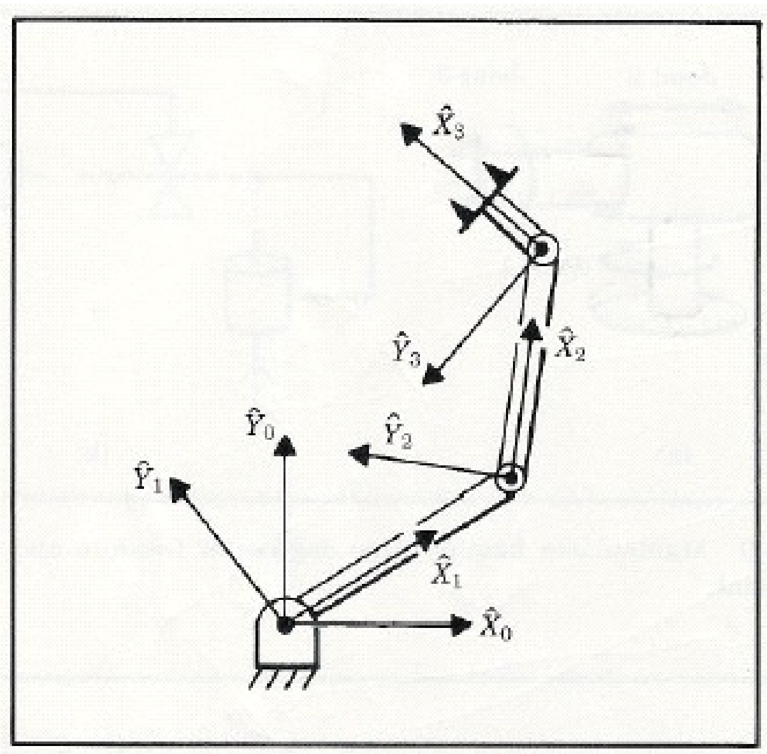
Cinemática Direta

- Concatenando transformações de elos
  - Com a definição dos *frames* dos elos e seus parâmetros encontrados, a obtenção das equações cinemáticas é direta.
  - A partir dos valores dos parâmetros dos elos, cada matriz de transformação de um elo individual pode ser calculada.
  - As transformações de elos podem ser multiplicadas para encontrar uma única transformação que descreve o *frame* ***{N}*** em relação ao frame ***{0}***, ou seja:

$$ {}^{0}_{N}T = {}^{0}_{1}T \; {}^{1}_{2}T \; {}^{2}_{3}T \ldots {}^{N-1}_{N}T $$

Cinemática Direta

- Exemplo 1: Equações cinemáticas do manipulador RRR



i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

Cinemática Direta

- Exemplo 1: Equações cinemáticas do manipulador RRR

$$
{}^{0}_{1}T = R_Z(\theta_1) = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{1}_{2}T = D_X(a_1) R_Z(\theta_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Cinemática Direta

- Exemplo 1: Equações cinemáticas do manipulador RRR

$$
{}^{2}_{3}T = D_X(a_2)R_Z(\theta_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & L_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{0}_{3}T = {}^{0}_{1}T \; {}^{1}_{2}T \; {}^{2}_{3}T
$$

Cinemática Direta

- Exemplo 1: Equações cinemáticas do manipulador RRR

$$
{}^{1}_{3}T = {}^{1}_{2}T \; {}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & L_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{1}_{3}T = \begin{bmatrix} c_2c_3 - s_2s_3 & -\left(c_2s_3 + s_2c_3\right) & 0 & c_2L_2 + L_1 \\ s_2c_3 + c_2s_3 & -s_2s_3 + c_2c_3 & 0 & s_2L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Cinemática Direta

- Exemplo 1: Equações cinemáticas do manipulador RRR

$$\text{Identidades trigonométricas}\begin{cases}\cos(\theta_1+\theta_2) = \mathrm{c}_{12} = c_1c_2 - s_1s_2\\ \mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2) = \mathrm{s}_{12} = c_1s_2 + c_2s_1\end{cases}$$

$$ {}^1_3T = \begin{bmatrix} c_2c_3 - s_2s_3 & -(c_2s_3+s_2c_3) & 0 & c_2L_2+L_1 \\ s_2c_3+c_2s_3 & -s_2s_3+c_2c_3 & 0 & s_2L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & c_2L_2+L_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & s_2L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cinemática Direta

- Exemplo 1: Equações cinemáticas do manipulador RRR

$$ {}^{0}_{3}T = {}^{0}_{1}T \; {}^{1}_{3}T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & c_2 L_2 + L_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & s_2 L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}_{3}T = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} - s_1 s_{23} & -\left(c_1 s_{23} + s_1 c_{23}\right) & 0 & c_1 c_2 L_2 + c_1 L_1 - s_1 s_2 L_2 \\ s_1 c_{23} + c_1 s_{23} & -s_1 s_{23} + c_1 c_{23} & 0 & s_1 c_2 L_2 + s_1 L_1 + c_1 s_2 L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Cinemática Direta

- Exemplo 1: Equações cinemáticas do manipulador RRR

$$ {}^{0}_{3}T = \begin{bmatrix} c_1c_{23} - s_1s_{23} & -\left(c_1s_{23} + s_1c_{23}\right) & 0 & c_1L_1 + \left(c_1c_2 - s_1s_2\right)L_2 \\ s_1c_{23} + c_1s_{23} & -s_1s_{23} + c_1c_{23} & 0 & s_1L_1 + \left(c_1s_2 + s_1c_2\right)L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}_{3}T = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & c_1L_1 + c_{12}L_2 \\ s_{123} & c_{123} & 0 & s_1L_1 + s_{12}L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Cinemática Direta

- Exemplo 1: Equações cinemáticas do manipulador RRR

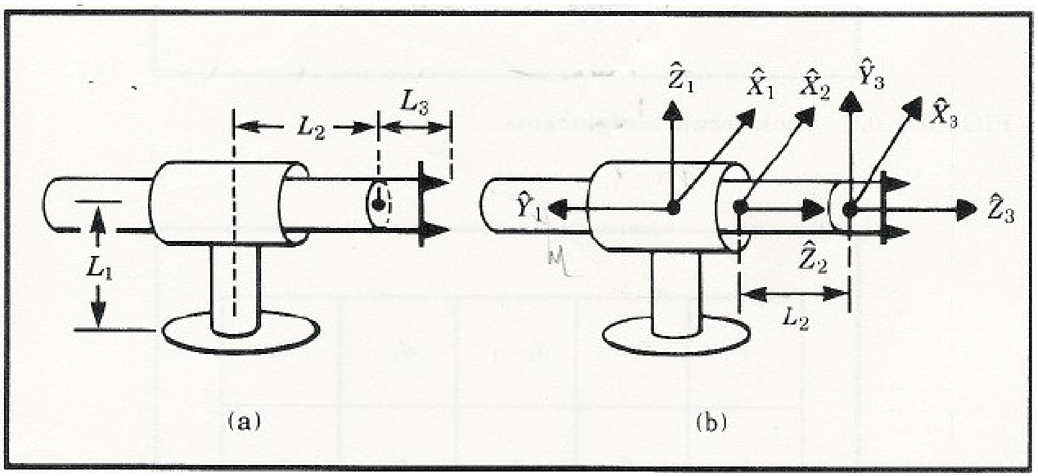
$$
{}^{0}_{3}T = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & c_1L_1 + c_{12}L_2 \\ s_{123} & c_{123} & 0 & s_1L_1 + s_{12}L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Onde,

$$
\begin{array}{llll}
r_{11} = c_{123} & r_{12} = -s_{123} & r_{13} = 0 & p_x = c_1L_1 + c_{12}L_2 \\
r_{21} = s_{123} & r_{22} = c_{123} & r_{23} = 0 & p_y = s_1L_1 + s_{12}L_2 \\
r_{31} = 0 & r_{32} = 0 & r_{33} = 1 & p_z = 0
\end{array}
$$

Cinemática Direta

- Exemplo 2: Equações cinemáticas do manipulador RPR



i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90º	0	d_2	0
3	0	0	L_2	θ_3

Cinemática Direta

- Exemplo 2: Equações cinemáticas do manipulador RPR

$$ {}^{0}_{1}T = R_Z(\theta_1) = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{1}_{2}T = R_X(\alpha_1) D_Z(d_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha 1} & -s_{\alpha 1} & 0 \\ 0 & s_{\alpha 1} & c_{\alpha 1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Cinemática Direta

- Exemplo 2: Equações cinemáticas do manipulador RPR

$$ {}^{2}_{3}T = R_Z(\theta_3) D_Z(L_2) = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}_{3}T = {}^{0}_{1}T \; {}^{1}_{2}T \; {}^{2}_{3}T $$

Cinemática Direta

- Exemplo 2: Equações cinemáticas do manipulador RPR

$$ {}^{1}_{3}T = {}^{1}_{2}T \; {}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{1}_{3}T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -(L_2 + d_2) \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Cinemática Direta

- Exemplo 2: Equações cinemáticas do manipulador RPR

$$
{}^{0}_{3}T = {}^{0}_{1}T\ {}^{1}_{3}T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -(L_2 + d_2) \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{0}_{3}T = \begin{bmatrix} (c_1 c_3) & -(c_1 s_3) & s_1 & s_1(L_2 + d_2) \\ (s_1 c_3) & -(s_1 s_3) & -c_1 & -c_1(L_2 + d_2) \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Cinemática Direta

- Exemplo 2: Equações cinemáticas do manipulador RPR

$$
{}^{0}_{3}T = \begin{bmatrix} (c_1 c_3) & -(c_1 s_3) & s_1 & s_1(L_2 + d_2) \\ (s_1 c_3) & -(s_1 s_3) & -c_1 & -c_1(L_2 + d_2) \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Onde,

$$
r_{11} = (c_1 c_3) \quad r_{12} = -(c_1 s_3) \quad r_{13} = s_1 \quad p_x = s_1(L_2 + d_2)
$$

$$
r_{21} = (s_1 c_3) \quad r_{22} = -(s_1 s_3) \quad r_{23} = -c_1 \quad p_y = -c_1(L_2 + d_2)
$$

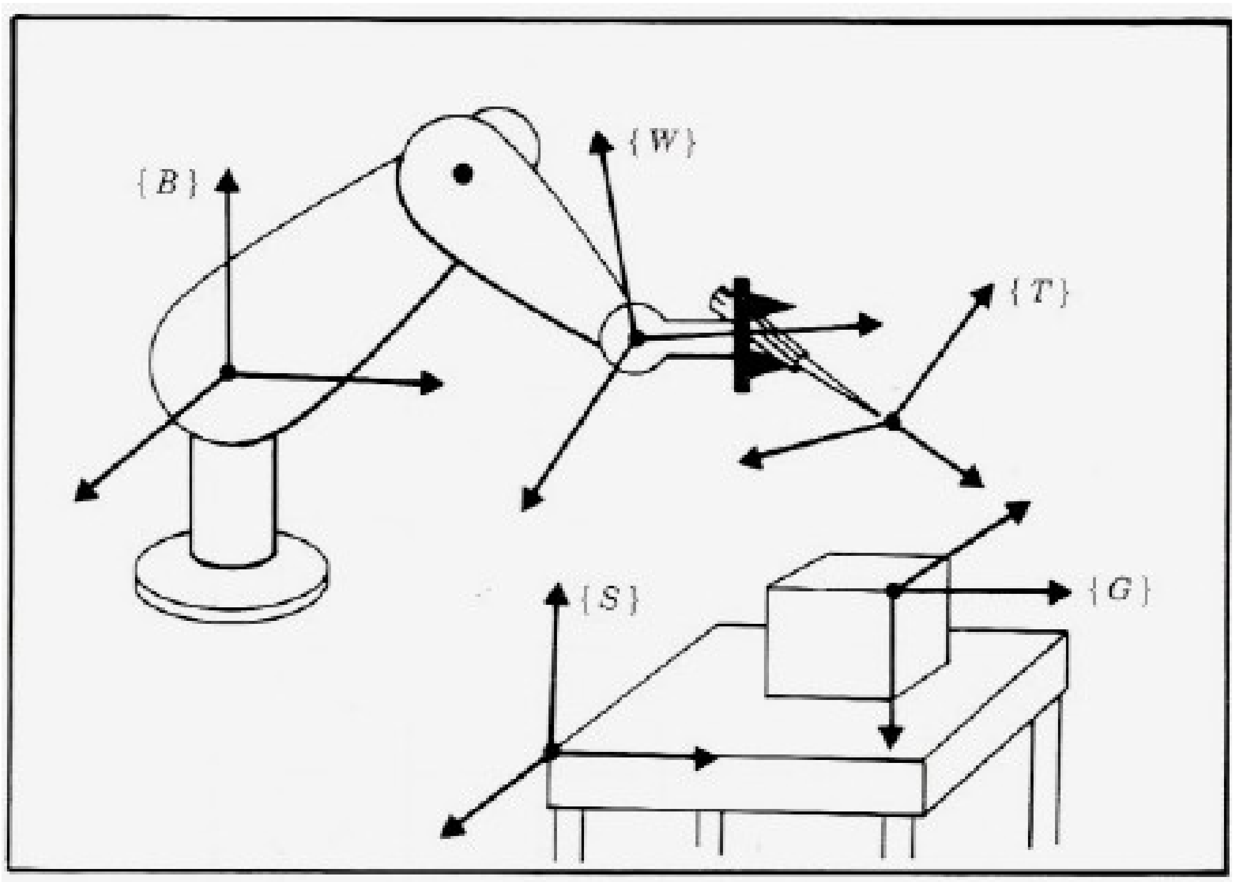
$$
r_{31} = s_3 \quad r_{32} = c_3 \quad r_{33} = 0 \quad p_z = 0
$$

Cinemática Direta

- Frames com nomes padrões
  - Como uma convenção, são atribuídos nomes e localizações para certos frames padrões associados com um robô e sua área de trabalho.
  - Os nomes dos frames fazem referencia às posições que os definem.
  - O usos desses nomes padrões no projeto do sistema de controle do robô e da programação, facilitam o entendimento.
  - Os movimentos do robô serão descritos em termos desses frames padrões.

Cinemática Direta

- Frames com nomes padrões

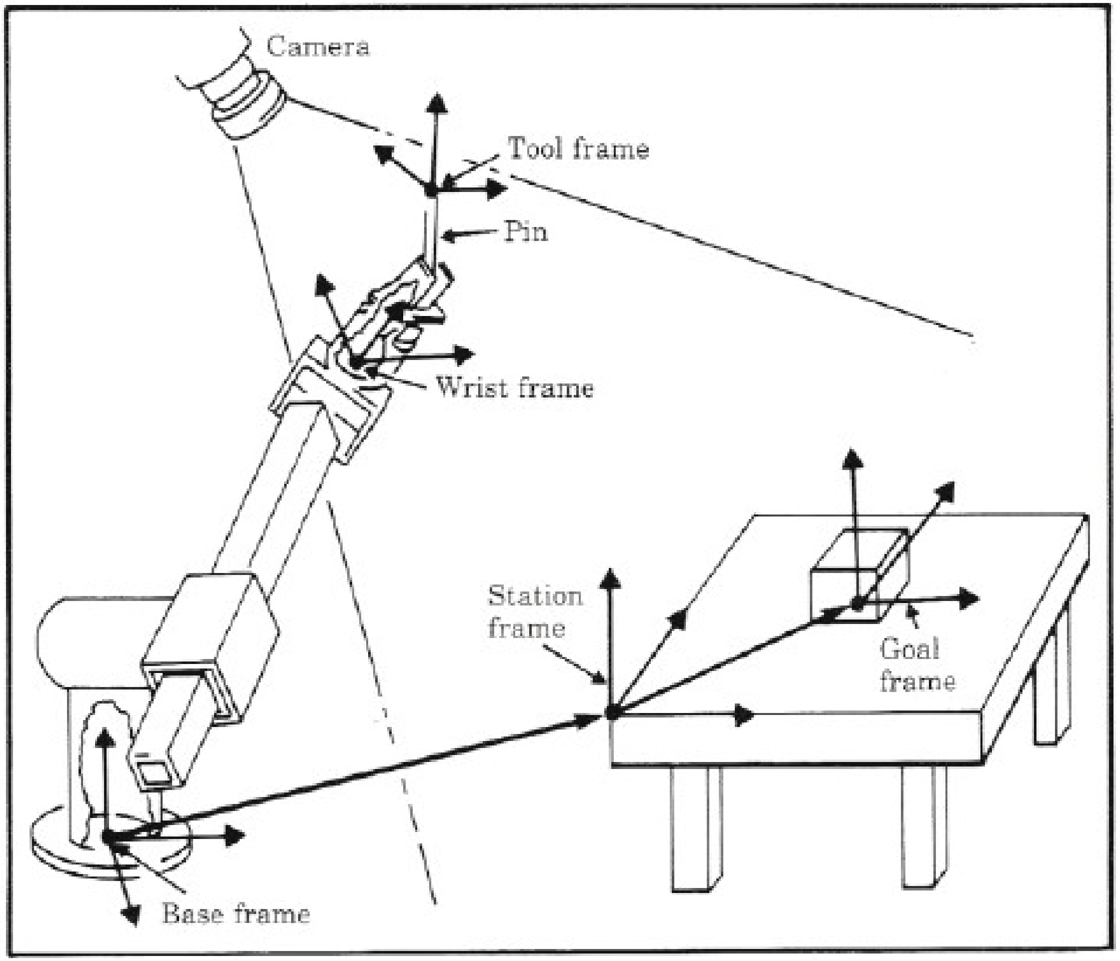


Cinemática Direta

- Frames com nomes padrões
  - Frame *{B}* : Frame da base do manipulador (link 0).
  - Frame *{W}* : Frame *Wrist* , frame do último link do manipulador (link N).
  - Frame *{T}* : Frame da ferramenta do manipulador
  - Frame *{S}* : Frame *Station*, frame da bancada onde é realizada a tarefa.
  - Frame *{G}* : Frame *Goal*, frame da peça sobre a qual é realizda a tarefa.

Cinemática Direta

- Exemplo: Robô para tarefa *pick-and-place*



Cinemática Direta

- Exemplo: Robô para tarefa *pick-and-place*
  - Determinação da posição da garra em relação à bancada onde é realizada a tarefa

$$ {}^{S}_{T}T = {}^{B}_{S}T^{-1} \; {}^{B}_{W}T \; {}^{W}_{T}T $$