Descrições Espaciais e Transformações

4º Engenharia de Controle e Automação

FACIT / 2009

Prof. Maurílio J. Inácio

Descrições Espaciais e Transformações

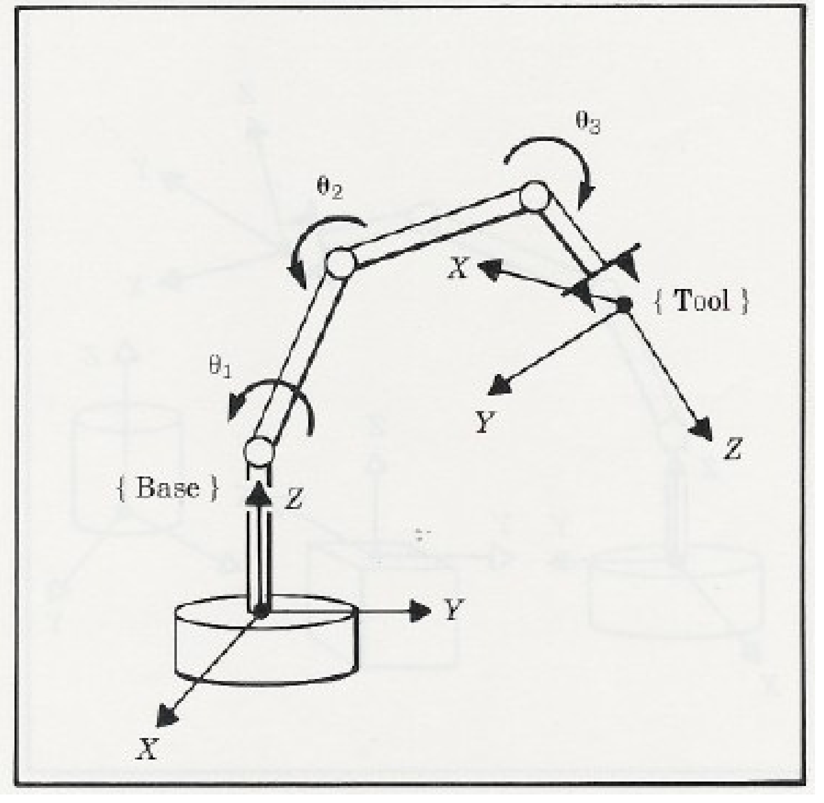
- Descrição de posição e orientação
  - O estudo de robótica envolve constantemente a localização de objetos (as partes e ferramentas) em espaço tridimensional.
  - Esses objetos são descritos por apenas dois atributos: posição e orientação.
  - Para descrever a posição e orientação de um corpo no espaço é necessário fixar um sistema de coordenadas (*frame*) ao objeto.
  - O *frame* pode ser descrito em relação ao algum sistema de coordenada de referência.

Descrições Espaciais e Transformações

- Descrição de posição e orientação
  - Qualquer *frame* pode servir como sistema de referência, o qual expressa a posição e a orientação de um corpo. Assim, pode-se pensar em transformação ou mudança de descrição destes atributos (posição e orientação) de um *frame* para outro.
  - Normalmente a descrição de posição de um manipulador é feita descrevendo-se o *frame* da ferramenta, o qual é fixado no efetuador, relativo ao *frame* da base, o qual é fixado na base do manipulador.

Descrições Espaciais e Transformações

- Descrição de posição e orientação



Descrição do *frame* da ferramenta em relação ao *frame* da base.

Descrições Espaciais e Transformações

- Descrição de posição e orientação
  - Como descrições envolvem operações com vetores e matrizes, as seguintes convenções de notação serão adotadas (conforme CRAIG):
    - As variáveis escritas com letras maiúsculas representam vetores ou matrizes e as variáveis escritas com letras minúsculas representam escalares.
    - O subscrito e o sobrescrito identificam o sistema de coordenadas. Exemplo: ${}^{A}P$ representa um vetor posição escrito no sistema de coordenadas $\{A\}$, ${}^{A}_{B}R$ matriz rotacional a qual especifica uma relação entre o sistema de coordenadas $\{A\}$ e $\{B\}$.

Descrições Espaciais e Transformações

- Descrição de posição e orientação
  - O sobrescrito utilizado depois de uma variável maiúscula indica a inversão ou a transposição. Exemplo:
    - R^{-1} representa a matriz inversa de R, R^{T} representa a matiz transposta de R
  - O subscrito utilizado depois de uma variável maiúscula indica a uma componente de um vetor (ex. *x*, *y* ou *z*). Exemplo:
    - P_x = componente x do vetor P.
  - As diferentes notações usadas para funções trigonométricas serão $\cos\theta 1 = c\theta 1 = c1$

Descrições Espaciais e Transformações

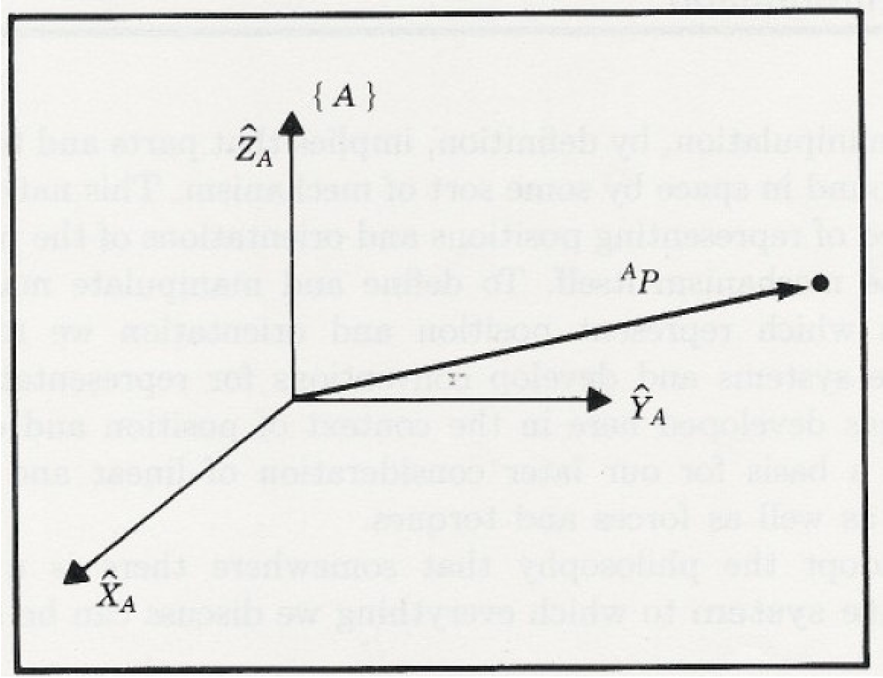
- Descrição de posição e orientação
  - Vetores são representados por vetores colunas
  - Vetores linha deverão estar transpostos explicitamente.
  - Será adotado que todas as posições e orientações serão referenciadas a um sistema de coordenada denominado sistema de coordenada universo.

Descrições Espaciais e Transformações

- Descrição de uma posição
  - Estabelecido um sistema de coordenadas, pode-se localizar qualquer ponto no universo com um vetor posição 3 x 1
  - Os vetores devem ser marcados com a informação identificando a qual sistema de coordenadas ele está referenciado, por exemplo, ${}^{A}P$ significa que os componentes do vetor P tem valores numéricos que indicam distâncias ao longo dos eixos de $\{A\}$

Descrições Espaciais e Transformações

- Descrição de uma posição



$$^AP = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

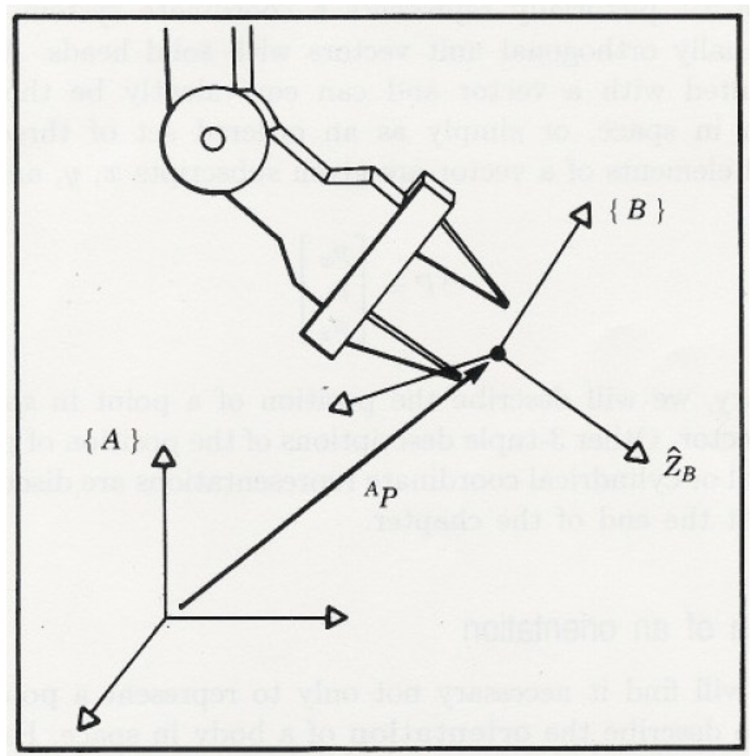
Exemplo de um vetor relativo a um sistema de coordenadas de referência.

Descrições Espaciais e Transformações

- Descrição de uma orientação
  - Muitas vezes é necessário não somente representar um ponto no espaço, mas também a orientação de um corpo no espaço
  - Para descrever a orientação de um corpo, fixa-se um sistema de coordenadas ao corpo e descreve-se seu sistema de coordenadas relativo ao sistema de referência
  - As posições de pontos são descritos com vetores e orientações de corpos são descritos com um sistema de coordenadas fixado a outro

Descrições Espaciais e Transformações

- Descrição de uma orientação



Exemplo de um sistema de coordenadas *{B}* fixado a um corpo (garra). A descrição de *{B}* relativa a *{A}* é suficiente para dar a orientação do corpo.

Descrições Espaciais e Transformações

- Descrição de uma orientação
  - No exemplo, o sistema de coordenadas *{B}* é descrito por três vetores unitários dos três eixos principais em termos do sistema de coordenadas *{A}*
  - Os vetores unitários de *{B}*,

$$\hat{X}_B, \hat{Y}_B, \hat{Z}_B$$

quando escritos em relação a *{A}*, são denominados

$${}^A\hat{X}_B, {}^A\hat{Y}_B, {}^A\hat{Z}_B$$

  - Os três vetores unitário juntos formam uma matriz 3x3, denominada matriz de rotação

Descrições Espaciais e Transformações

- Descrição de uma orientação

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_{B} & {}^{A}\hat{Y}_{B} & {}^{A}\hat{Z}_{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} $$

  - Os escalares r_{ij} são simples projeções de cada um dos vetores unitários de *{B}* na direção de *{A}*,ou seja

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} \hat{X}_{B} \cdot \hat{X}_{A} & \hat{Y}_{B} \cdot \hat{X}_{A} & \hat{Z}_{B} \cdot \hat{X}_{A} \\ \hat{X}_{B} \cdot \hat{Y}_{A} & \hat{Y}_{B} \cdot \hat{Y}_{A} & \hat{Z}_{B} \cdot \hat{Y}_{A} \\ \hat{X}_{B} \cdot \hat{Z}_{A} & \hat{Y}_{B} \cdot \hat{Z}_{A} & \hat{Z}_{B} \cdot \hat{Z}_{A} \end{bmatrix} $$

Descrições Espaciais e Transformações

- Descrição de uma orientação
  - Como o produto escalar de dois vetores unitários resume-se no cosseno do ângulo entre eles, as matrizes de rotação são conhecidas como matrizes de cossenos diretores.
  - Dada a matriz de rotação de *{B}* em relação a *{A}* ${}^{A}_{B}R$, a matriz de rotação de *{A}* em relação *{B}* ${}^{B}_{A}R$ é dada pela transposta de ${}^{A}_{B}R$, ou seja, ${}^{A}_{B}R^{T}$

$$
{}^{B}_{A}R = \begin{bmatrix} \hat{X}_A \cdot \hat{X}_B & \hat{Y}_A \cdot \hat{X}_B & \hat{Z}_A \cdot \hat{X}_B \\ \hat{X}_A \cdot \hat{Y}_B & \hat{Y}_A \cdot \hat{Y}_B & \hat{Z}_A \cdot \hat{Y}_B \\ \hat{X}_A \cdot \hat{Z}_B & \hat{Y}_A \cdot \hat{Z}_B & \hat{Z}_A \cdot \hat{Z}_B \end{bmatrix}
$$

Descrições Espaciais e Transformações

- Descrição de uma orientação
  - A inversa de ${}^{A}_{B}R$ é igual a sua transposta, pois

$$
{}^{A}_{B}R^{T}\,{}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_{B}^{T} \\ {}^{A}\hat{Y}_{B}^{T} \\ {}^{A}\hat{Z}_{B}^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_{B} & {}^{A}\hat{Y}_{B} & {}^{A}\hat{Z}_{B} \end{bmatrix} = I_{3}
$$

  - Onde I_3 é uma matriz identidade 3x3, assim

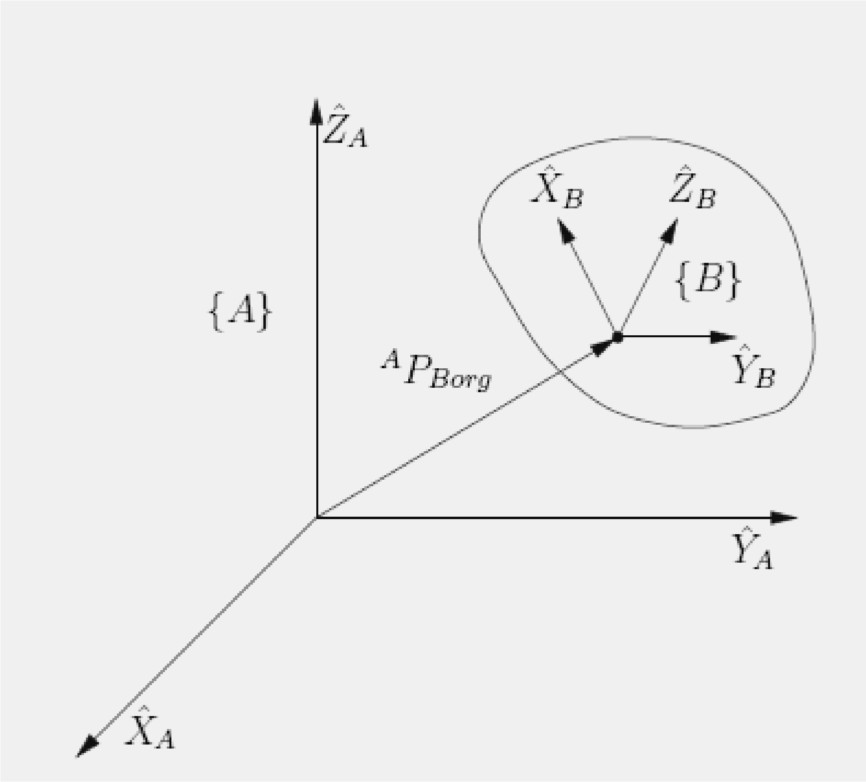
$$
{}^{A}_{B}R = {}^{B}_{A}R^{-1} = {}^{B}_{A}R^{T}
$$

Descrições Espaciais e Transformações

- Descrição de um *frame*
  - Em robótica, *frame* é definido como uma entidade que fornece a informação necessária para descrever posição e orientação
  - Consiste num conjunto de quatro vetores, um para a posição e três para a orientação
  - Por exemplo, o *frame {B}* é descrito por ${}^{A}_{B}R$ e ${}^{A}P_{BORG}$ onde ${}^{A}P_{BORG}$ é o vetor que localiza a origem de *{B}* $\{B\} = \{{}^{A}_{B}R, {}^{A}P_{BORG}\}$
  - Em resumo, um *frame* pode ser usado como uma descrição de um sistema de coordenadas relativo a outro

Descrições Espaciais e Transformações

- Descrição de um *frame*



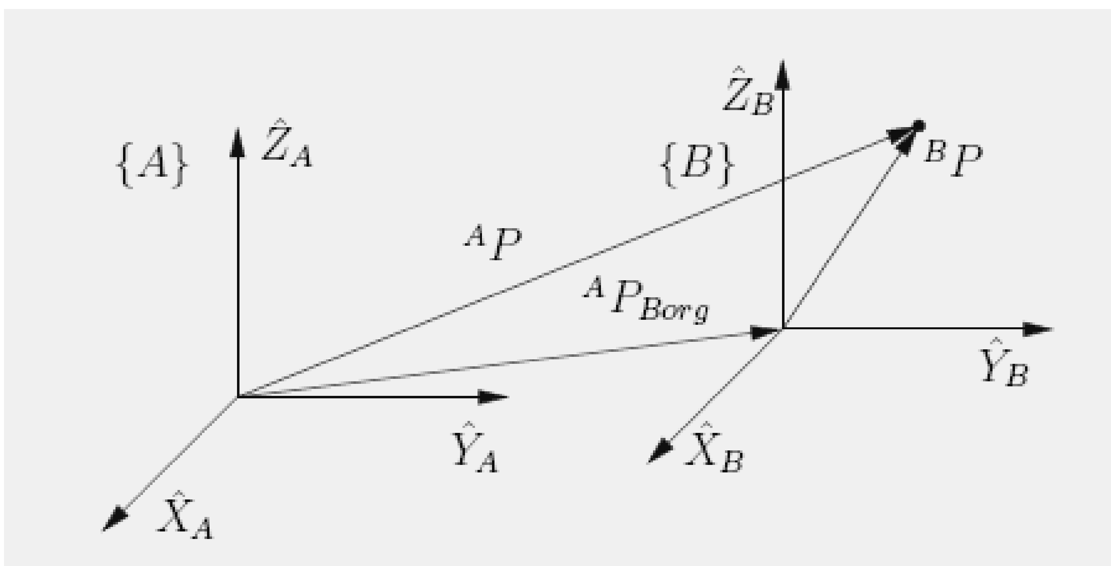
Frame {B} em relação ao *frame* {A}.

Descrições Espaciais e Transformações

- Mapeamentos
  - Em muitos problemas de robótica, pode ser necessário expressar a mesma informação em termos de vários sistemas de coordenada de referência.
  - Mapeamento consiste em mudar descrições de um *frame* para outro *frame*.
  - Mapeamentos podem ser
    - envolvendo apenas translação
    - envolvendo apenas rotação
    - envolvendo translação e rotação

Descrições Espaciais e Transformações

- Mapeamento envolvendo apenas translação
  - Dados dois *frames* *{A}*, *{B}* com a mesma orientação e com origens não coincidentes:



Descrições Espaciais e Transformações

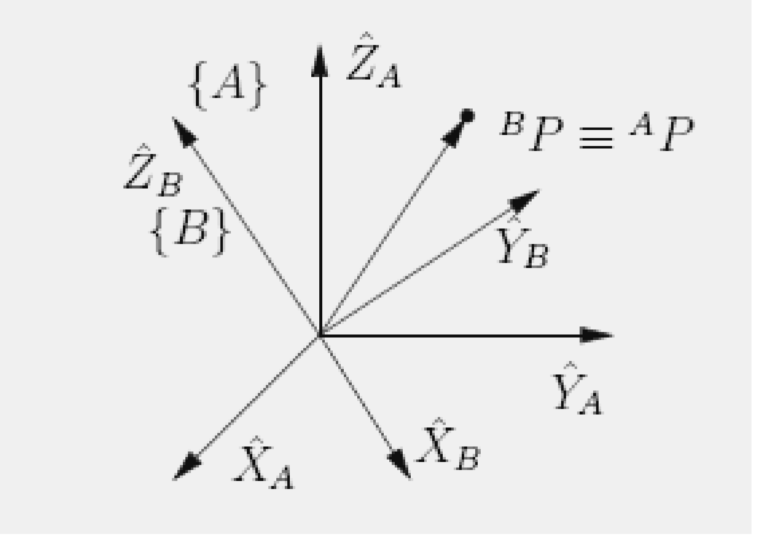
- Mapeamento envolvendo apenas translação
  - Supondo que seja conhecida a descrição do ponto em relação ao *frame {B}*, a sua descrição em relação ao *frame {A}* será dada por

$$^{A}P = {}^{B}P + {}^{A}P_{BORG}$$

  - Onde $^{A}P_{BORG}$ é um vetor que localiza a origem do *frame {B}* relativo ao *frame {A}*

Descrições Espaciais e Transformações

- Mapeamento envolvendo apenas rotação
  - Dados dois *frames* *{A}*, *{B}* com origens coincidentes e rotacionados entre si:



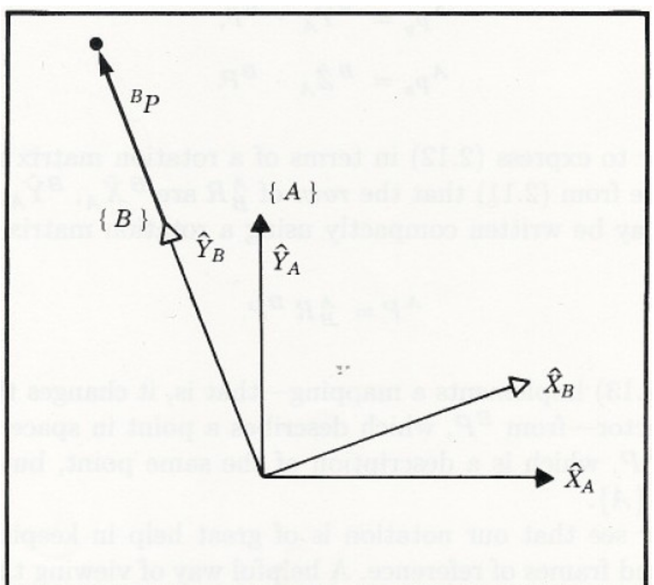
Descrições Espaciais e Transformações

- Mapeamento envolvendo apenas rotação
  - O vetor ${}^{B}P$ é descrito em relação ao *frame {B}*
  - Sua descrição em relação ao *frame {A}* é conhecida quando a orientação do frame *{B}* é conhecida em relação ao frame *{A}*
  - Esta orientação é dada pela matriz de rotação ${}^{A}_{B}R$. Então, o vetor ${}^{A}P$ pode ser descrito por:

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}R \, {}^{B}P $$

Descrições Espaciais e Transformações

- Mapeamento envolvendo apenas rotação
  - Exemplo:
    - Dado um *frame {B}* rotacionado do frame *{A}* em torno de Z por 30º, calcule o vetor ${}^{A}P$ dado o vetor ${}^{B}P$ igual a:



$$ {}^{B}P = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 2.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} $$

Descrições Espaciais e Transformações

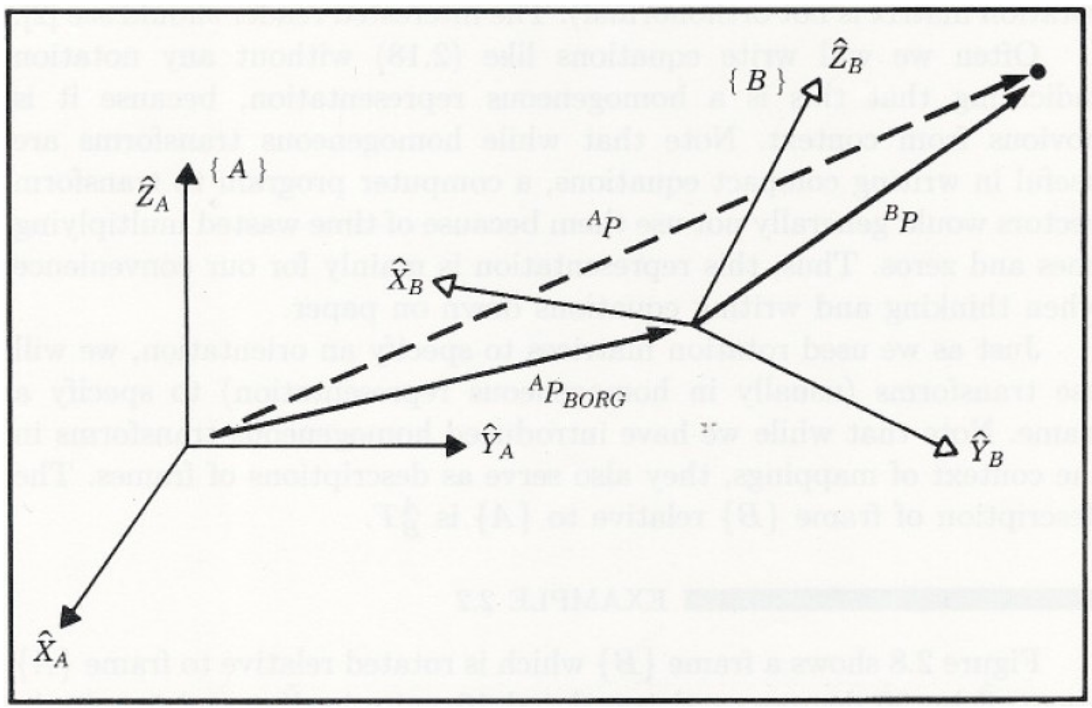
- Mapeamento envolvendo apenas rotação
  - Resposta:

$$
{}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^o & \cos 120^o & \cos 90^o \\ \cos 60^o & \cos 30^o & \cos 90^o \\ \cos 90^o & \cos 90^o & \cos 0^o \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{A}P = {}^{A}_{B}R \cdot {}^{B}P = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1{,}732 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Descrições Espaciais e Transformações

- Mapeamento envolvendo translação e rotação
  - Dados dois *frames {A}*, *{B}* com orientação diferentes e com origens não coincidentes:



Descrições Espaciais e Transformações

- Mapeamento envolvendo translação e rotação
  - O vetor ${}^{B}P$ é descrito em relação ao *frame {B}*
  - O vetor ${}^{A}P_{BORG}$ localiza a origem do frame *{B}* relativo ao frame *{A}*
  - Para calcular o vetor ${}^{A}P$, deve-se mudar a descrição do vetor ${}^{B}P$ para um frame intermediário, com a mesma orientação de *{A}* e mesma origem de *{B}*
  - A operação deve envolver uma translação, realizada pela adição do vetor ${}^{A}P_{BORG}$ e uma rotação, realizada pela multiplicação com a matriz de rotação ${}^{A}_{B}R$

Descrições Espaciais e Transformações

- Mapeamento envolvendo translação e rotação
  - Então, o vetor ^{A}P pode ser descrito por:

$$^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P + {}^{A}P_{BORG}$$

  - A equação acima realiza o mapeamento geral, pois permite mudar a descrição de um frame qualquer para outro frame
  - Essa mesma equação pode ser re-escrita como

$$^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}P$$

  - Onde ${}^{A}_{B}T$ é um operador que faz o mapeamento do *frame {B}* para o *frame {A}*

Descrições Espaciais e Transformações

- Mapeamento envolvendo translação e rotação
  - Outra forma de escrever a equação é:

$$\begin{bmatrix} {}^{A}P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & {}^{A}P_{BORG} \\ 000 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}P \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - Onde $\begin{bmatrix} {}^{A}P \\ 1 \end{bmatrix}$ é um vetor em coordenadas homogêneas
  - E $\begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & {}^{A}P_{BORG} \\ 000 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz de transformação

homogênea

Descrições Espaciais e Transformações

- Mapeamento envolvendo translação e rotação
  - Matrizes de transformações homogêneas permitem compor transformações de maneira elegante:
    - Rotações, Translações e Escalas.
    - Em qualquer dimensão do espaço.
  - A matriz de transformação homogênea pode ser particionada em quatro campos

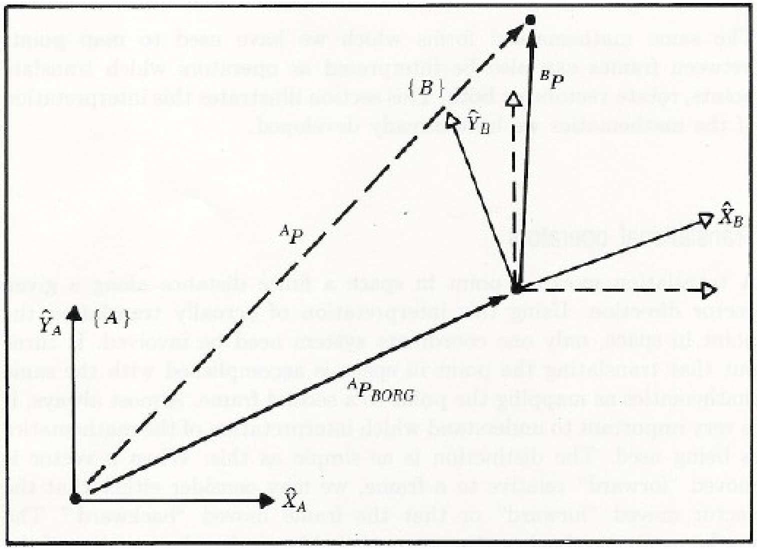
$$\begin{bmatrix} rotação & translação \\ perspectiva & escala \end{bmatrix}$$

Descrições Espaciais e Transformações

- Mapeamento envolvendo translação e rotação
  - Os campos de rotação e translação são utilizados para descrever a rotação e a translação envolvidas no mapeamento
  - O campo de escala é utilizado para representar diferenças de escala entre os sistemas
  - O campo de perspectiva é utilizado para representar a diferença de perspectiva entre os sistemas
  - Em robótica normalmente estes dois últimos campos assumem os valores de operador nulo para as respectivas operações, ou seja, [0 0 0] para perspectiva e [1] para escala

Descrições Espaciais e Transformações

- Mapeamento envolvendo translação e rotação
  - Exemplo:
    - Dado um *frame {B}* rotacionado do *frame {A}* em torno de Z em 30º, transladado 10 unidades em X e 5 unidades em Y, calcule o vetor ${}^{A}P$ dado o vetor ${}^{B}P$ igual a $\begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}^T$



Descrições Espaciais e Transformações

- Mapeamento envolvendo translação e rotação
  - Resposta:

$$
{}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & {}^{A}P_{BORG} \\ 000 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A & p_x \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A & p_y \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} \cos 30^o & \cos 120^o & \cos 90^o & 10 \\ \cos 60^o & \cos 30^o & \cos 90^o & 5 \\ \cos 90^o & \cos 90^o & \cos 0^o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Descrições Espaciais e Transformações

- Mapeamento envolvendo translação e rotação
  - Cont. resposta:

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}T \cdot {}^{B}P = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,5 & 0 & 10 \\ 0,5 & 0.866 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{A}P = \begin{bmatrix} 9,098 \\ 12,562 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} $$

Descrições Espaciais e Transformações

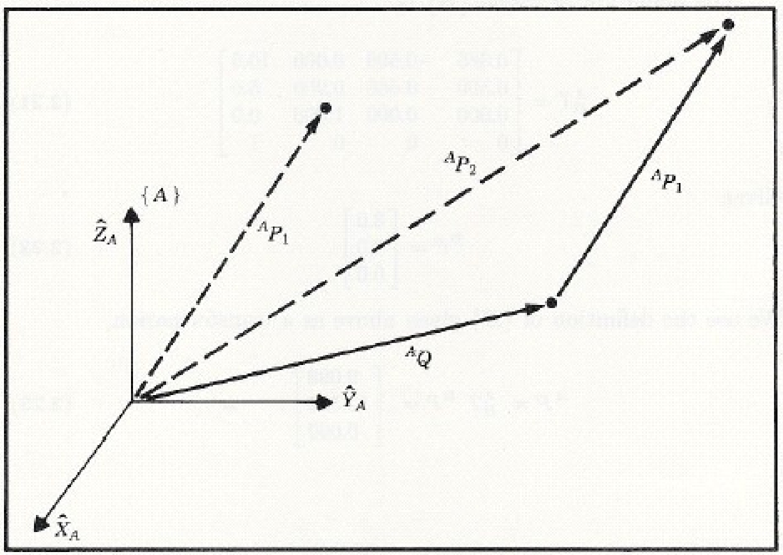
- Mapeamento envolvendo translação e rotação
  - A matriz 4 x 4 de transformação homogênea pode ser interpretada como:
    - A descrição de um *frame*: ${}^{A}_{B}T$ descreve o *frame* *{B}* em relação ao *frame* *{A}*
    - Uma transformação de mapeamento:
    - ${}^{A}_{B}T$ mapeia ${}^{B}P \rightarrow {}^{A}P$
    - Um operador de transformação, que utiliza apenas um *frame* e muda os objetos de posição

Descrições Espaciais e Transformações

- Operadores
  - Operadores movem pontos ou vetores no espaço
  - Esta movimentação pode ser translação, rotação ou ambas
  - Ao aplicar um operador a um ponto ou vetor, apenas um *frame* está envolvido, diferentemente de se aplicar um mapeamento, onde dois *frames* estão envolvidos
  - A matemática empregada nos operadores é a mesma empregada nos mapeamentos

Descrições Espaciais e Transformações

- Operador de translação
  - O operador de translação move um ponto no espaço a uma distância finita ao longo de um dado vetor direção
  - Seja um ponto ${}^{A}P_1$ transladado por um vetor ${}^{A}Q$ para obter um novo ponto ${}^{A}P_2$



Descrições Espaciais e Transformações

- Operador de translação
  - O ponto ${}^{A}P_2$ será dado por:

$$ {}^{A}P_2 = {}^{A}P_1 + {}^{A}Q $$

  - Esta operação pode ser representada na forma matricial como:

$$ {}^{A}P_2 = D_Q(q)\,{}^{A}P_1 $$

  - Onde D_Q é o operador de translação e q é a amplitude da translação ao longo do vetor ${}^{A}Q$

Descrições Espaciais e Transformações

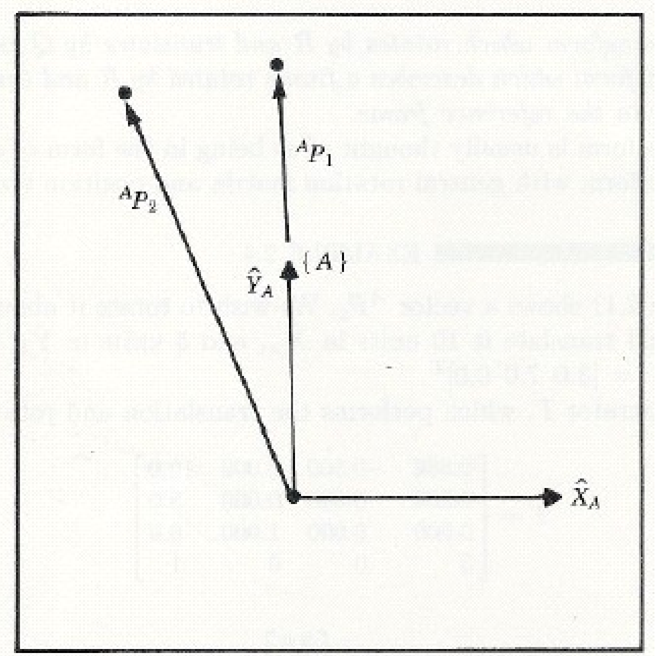
- Operador de translação
  - O operador D_Q pode ser dado como uma matriz de transformação homogênea

$$D_Q(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Onde q_x, q_y, q_z são os componentes do vetor de translação ${}^{A}Q$ e $q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$

Descrições Espaciais e Transformações

- Operador de rotação
  - O operador de rotação muda um ponto ${}^{A}P_1$ para um novo ponto ${}^{A}P_2$ por uma rotação R
  - Seja um ponto ${}^{A}P_1$ rotacionado em torno de Z para obter um novo ponto ${}^{A}P_2$



Descrições Espaciais e Transformações

- Operador de rotação
  - O ponto ${}^{A}P_2$ será dado por:

$$ {}^{A}P_2 = R\,{}^{A}P_1 $$

  - A matriz de rotação R pode ser melhor definida como:

$$ {}^{A}P_2 = R_K(\theta)\,{}^{A}P_1 $$

  - Onde $R_K(\theta)$ é o operador de rotação, que realiza a rotação sobre o eixo K em θ graus.

Descrições Espaciais e Transformações

- Operador de rotação

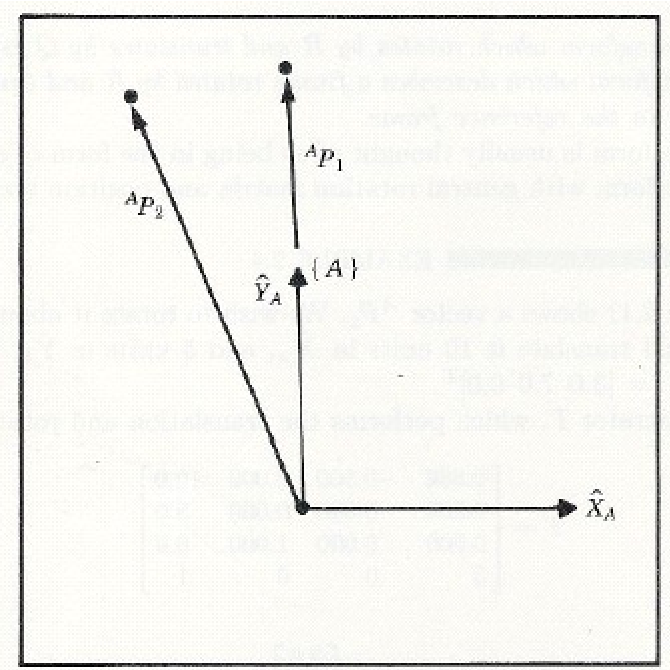
$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & sen\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Descrições Espaciais e Transformações

- Operador de rotação
  - Exemplo:
    - Dado um vetor ${}^{A}P_1$ rotacionado em torno de Z em 30º graus, calcule o novo vetor ${}^{A}P_2$



$$
{}^{A}P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Descrições Espaciais e Transformações

- Operador de rotação
  - Resposta:

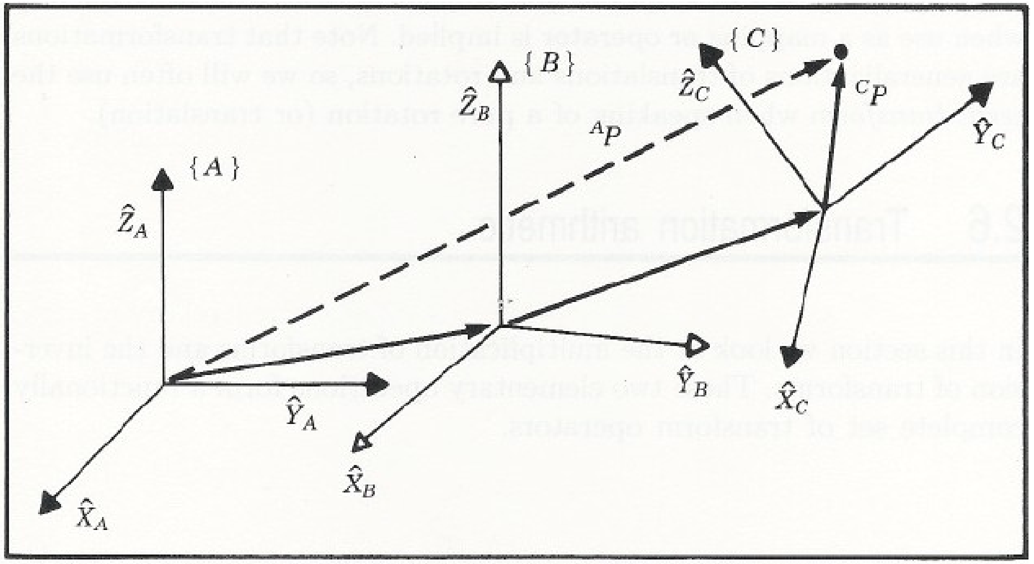
$$ {}^{A}P_{2} = R_{K}(\theta)\,{}^{A}P_{1} \rightarrow {}^{A}P_{2} = R_{Z}(30^{O})\,{}^{A}P_{1} $$

$$ R_{z} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow R_{z}(30^{O}) = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{A}P_{2} = R_{Z}(30^{O})\,{}^{A}P_{1} = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow {}^{A}P_{2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1{,}732 \\ 0 \end{bmatrix} $$

Descrições Espaciais e Transformações

- Aritmética de transformações
  - Operações aritméticas como multiplicação e inversão podem ser aplicadas a matrizes de transformação. Estas operações facilitam a descrição de um ponto envolvendo vários *frames*
  - Ex.: Dado o ponto ${}^{C}P$, encontrar ${}^{A}P$



Descrições Espaciais e Transformações

- Aritmética de transformações
  - O *frame {C}* é conhecido em relação ao *frame {B}* e o *frame {B}* é conhecido relação ao *frame {A}.* A transformação de ${}^{C}P$ em ${}^{A}P$ será dada por:

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}T\, {}^{B}P, \quad {}^{B}P = {}^{B}_{C}T\, {}^{C}P $$

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}T\, {}^{B}_{C}T\, {}^{C}P $$

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{C}T\, {}^{C}P $$

$$ \text{Onde}: \; {}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T\, {}^{B}_{C}T $$

Descrições Espaciais e Transformações

- Aritmética de transformações
  - O operador ${}^{A}_{C}T$ pode ser dado como:

$$ {}^{A}_{C}T = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R & {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P_{CORG} + {}^{A}P_{BORG} \\ 000 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{A}_{C}T = \begin{bmatrix} {}^{A}_{C}R & {}^{A}P_{CORG} \\ 000 & 1 \end{bmatrix} $$

Descrições Espaciais e Transformações

- Aritmética de transformações
  - Considerando um *frame {B}* conhecido em relação a um *frame {A},* calcular a inversa dessa transformação, significa obter a descrição do *frame {A}* em relação ao *frame {B}*
  - Uma forma direta de calcular a inversa da transformação é calcular a inversa da matriz de transformação homogênea, que é uma matriz 4x4
  - É mais fácil calcular a inversa a partir de um método que tira vantagem da estrutura da matriz de transformação

Descrições Espaciais e Transformações

- Aritmética de transformações
  - Para encontrar ${}^{B}_{A}T$, deve-se calcular ${}^{B}_{A}R$ e ${}^{B}P_{AORG}$ de ${}^{A}_{B}R$ e ${}^{A}P_{BORG}$
  - Lembrando que ${}^{B}_{A}R = {}^{A}_{B}R^{T}$, tem-se:

$${}^{B}\left({}^{A}P_{BORG}\right) = {}^{B}_{A}R\,{}^{A}P_{BORG} + {}^{B}P_{AORG}$$

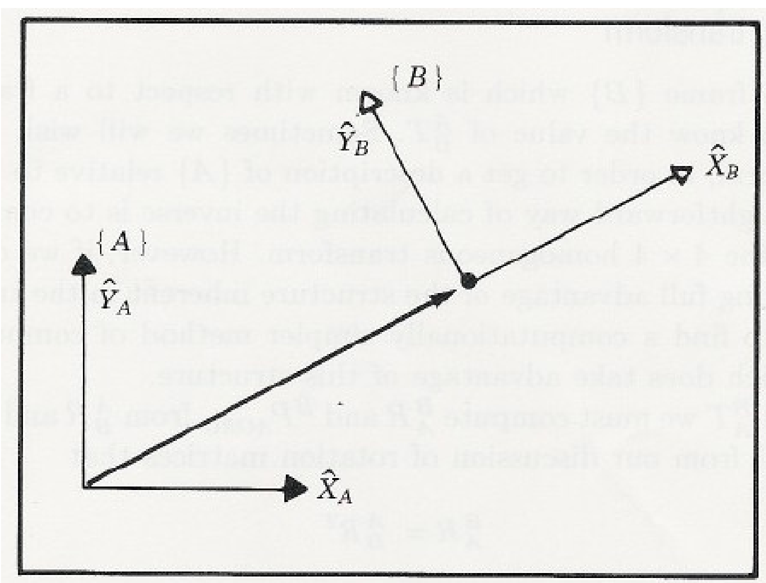
$${}^{B}P_{AORG} = -\,{}^{B}_{A}R\,{}^{A}P_{BORG}$$

$${}^{B}P_{AORG} = -\,{}^{A}_{B}R^{T}\,{}^{A}P_{BORG}$$

$$\text{Então,}\quad {}^{B}_{A}T = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R^{T} & -\,{}^{A}_{B}R^{T}\,{}^{A}P_{BORG} \\ 000 & 1 \end{bmatrix},\ \text{ou}\ \ {}^{B}_{A}T = {}^{A}_{B}T^{-1}$$

Descrições Espaciais e Transformações

- Aritmética de transformações
  - Exemplo:
    - Dado um *frame {B}* rotacionado do *frame {A}* em torno de Z em 30º, transladado 4 unidades em X e 3 unidades em Y, calcule ${}^{B}_{A}T$ dado ${}^{A}_{B}T$



$$
{}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0.5 & 0 & 4 \\ 0{,}5 & 0{,}866 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Descrições Espaciais e Transformações

- Aritmética de transformações
  - Resposta:

$$
{}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0.5 & 0 & 4 \\ 0{,}5 & 0{,}866 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad {}^{A}P_{BORG} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{B}_{A}R = {}^{A}_{B}R^{T} = \begin{bmatrix} 0{,}866 & 0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Descrições Espaciais e Transformações

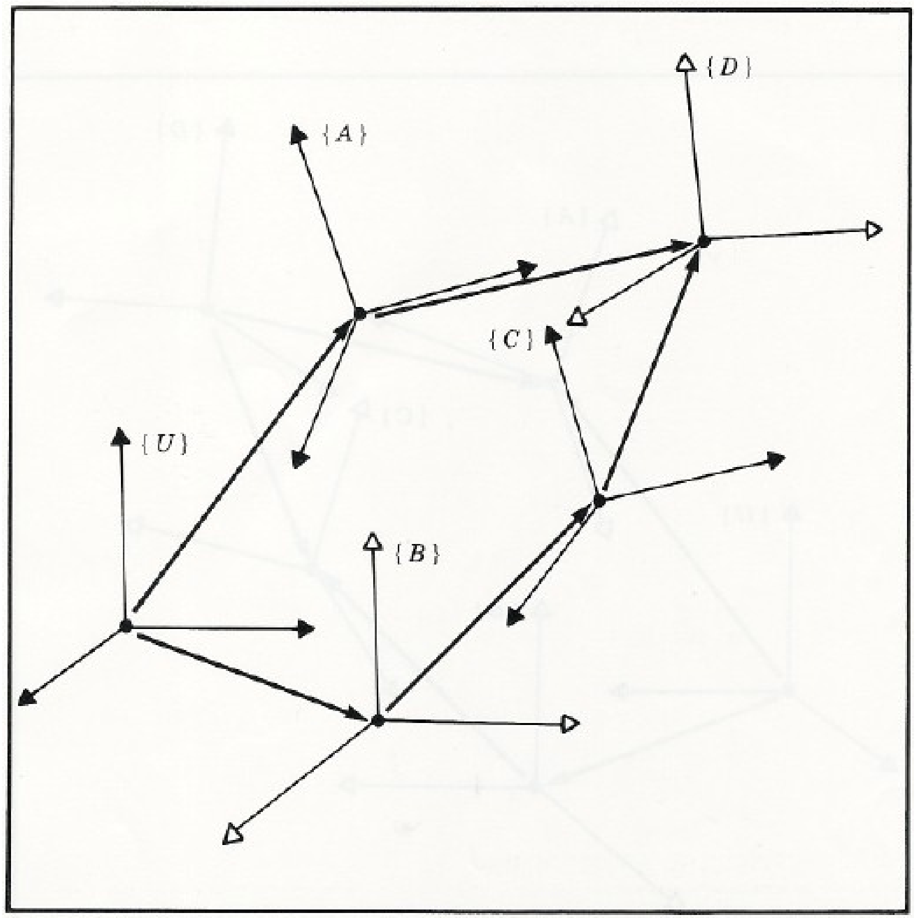
- Aritmética de transformações
  - Cont. resposta:

$$-{}^{A}_{B}R^{T}\,{}^{A}P_{BORG} = -\begin{bmatrix} 0{,}866 & 0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4{,}964 \\ -0{,}598 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^{B}_{A}T = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R^{T} & -{}^{A}_{B}R^{T}\,{}^{A}P_{BORG} \\ 000 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \quad {}^{B}_{A}T = \begin{bmatrix} 0{,}866 & 0{,}5 & 0 & -4{,}964 \\ -0{,}5 & 0{,}866 & 0 & -0{,}598 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Descrições Espaciais e Transformações

- Equações com transformações
  - Dado um sistema composto por cinco *frames*,



Descrições Espaciais e Transformações

- Equações de transformações
  - O *frame {D}*, pode ser expresso como um produto de transformações de duas maneiras diferentes

$$ {}^{U}_{D}T = {}^{U}_{A}T \; {}^{A}_{D}T $$

  - Ou

$$ {}^{U}_{D}T = {}^{U}_{B}T \; {}^{B}_{C}T \; {}^{C}_{D}T $$

  - Igualando-se as duas expressões, tem-se uma equação de transformações

$$ {}^{U}_{A}T \; {}^{A}_{D}T = {}^{U}_{B}T \; {}^{B}_{C}T \; {}^{C}_{D}T $$

Descrições Espaciais e Transformações

- Equações de transformações
  - Equações de transformações podem ser usadas para resolver problemas no caso de *n* transformações desconhecidas e *n* equações de transformações
  - No equação anterior

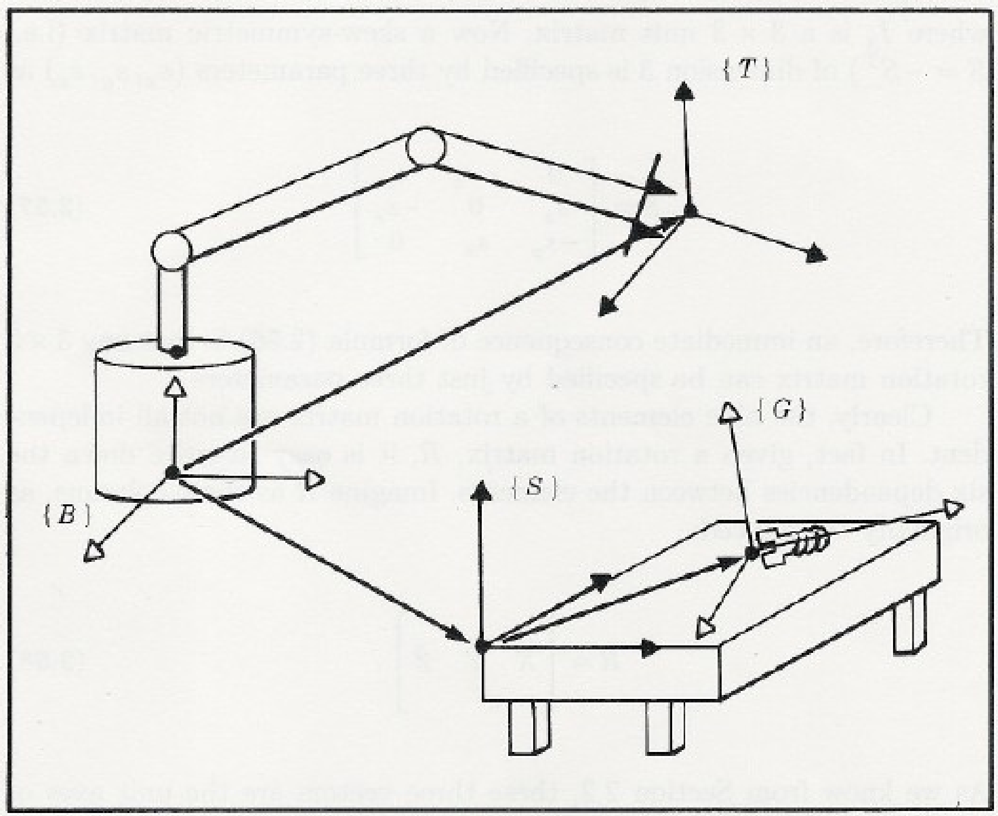
$$ {}^{U}_{A}T \; {}^{A}_{D}T = {}^{U}_{B}T \; {}^{B}_{C}T \; {}^{C}_{D}T $$

  - Se todas as transformações fossem conhecidas, exceto ${}^{B}_{C}T$, a solução seria facilmente encontrada por:

$$ {}^{B}_{C}T = {}^{U}_{B}T^{-1} \; {}^{U}_{A}T \; {}^{A}_{D}T \; {}^{C}_{D}T^{-1} $$

Descrições Espaciais e Transformações

- Equações com transformações
  - Exemplo: Determinar a transformação do *frame* da peça em relação ao *frame* da garra (${}^{T}_{G}T$)



Descrições Espaciais e Transformações

- Equações de transformações
  - Resposta
  - Com base nas setas que indicam a descrição de um *frame* em relação ao outro, parte-se do frame de origem (T) em direção ao *frame* de destino (G). Quando a seta é contrária ao caminho, a transformação correspondente é invertida. Assim, a transformação ${}^{T}_{G}T$ será dada por:

$$ {}^{T}_{G}T = {}^{B}_{T}T^{-1} \; {}^{B}_{S}T \; {}^{S}_{G}T $$