Controle de Sistemas I

Sinais e Sistemas - Fundamentos

Renato Dourado Maia

Faculdade de Ciência e Tecnologia de Montes Claros

Fundação Educacional Montes Claros

Conjuntos de Números e Equações

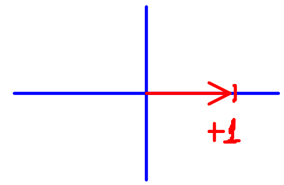
- Números Inteiros Positivos: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$
- Números Inteiros Negativos: $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$
- Números Fracionários: $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/2$
- Números Complexos: $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$

VOCÊS JÁ OUVIRAM FALAR DE NÚMEROS PERPENDICULARES?

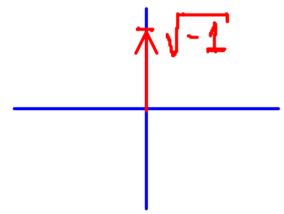
Números Perpendiculares???

RELAÇÃO DE EULER?

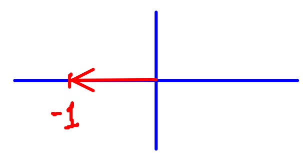
$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$



$$e^{0} = 1$$



$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j$$



$$e^{j\pi} = -1$$

Gauss disse que, caso a nomenclatura número perpendicular tivesse sido utilizada no lugar de número complexo/imaginário, os entraves encontrados para a aceitação dos números complexos teriam sido evitados...

Relação de Euler

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \frac{(j\theta)^4}{4!} + \frac{(j\theta)^5}{5!} + \frac{(j\theta)^6}{6!} + \cdots$$

$$= 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + j\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \cdots$$

$$cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + - \frac{\theta^8}{8!}\cdots$$

$$sen(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots$$

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

Sinais Exponenciais e Senoidais Contínuos

$$x(t) = Ce^{\alpha t}, \; onde \; C \; e \; \alpha \; são \; números \; complexos$$

- Casos a serem considerados:

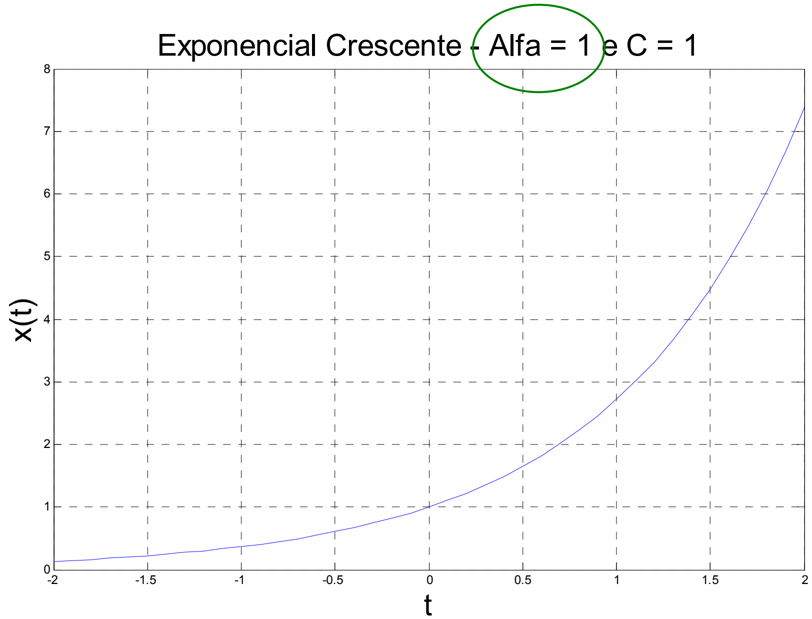
$$Caso \; 1: \; C \; e \; \alpha \; são \; números \; reais \rightarrow EXPONENCIAL \; REAL$$

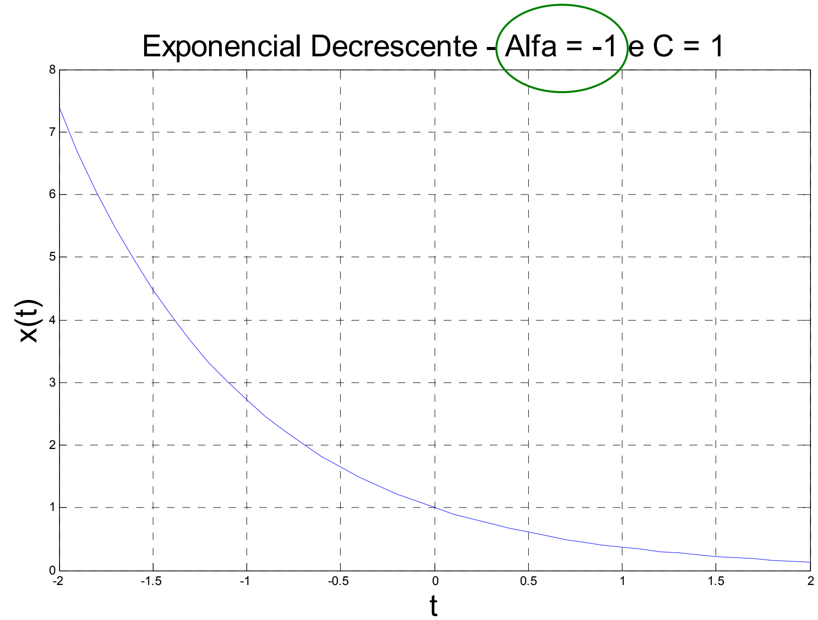
$$Caso \; 2: \; \alpha \; é \; puramente \; imaginário \rightarrow EXPONENCIAL \; COMPLEXA \; PERIÓDICA$$

$$Caso \; 3: \; C \; e \; \alpha \; são \; complexos \rightarrow misto \; dos \; casos \; 1 \; e \; 2$$

Sinais Exponenciais e Senoidais Contínuos

$$Caso\ 1:\ x(t) = Ce^{\alpha t},\ C\ \ e\ \alpha\ são\ números\ reais$$





Script em Matlab: M_4_SinaisFundamentosProg1.m

Sinais Exponenciais e Senoidais Contínuos

$$Caso2: \ x(t) = e^{j\omega_0 t}, \ C = 1 \ e \ \alpha = j\omega_0$$

O SINAL É PERIÓDICO? $e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$

$e^{j\omega_0 T} = 1$ ⇨ CONDIÇÃO DE PERIODICIDADE

PERÍODO FUNDAMENTAL: $T_0 = \dfrac{2\pi}{|\omega_0|}, \ \omega_0 \neq 0$

$$\therefore \omega_0 \ \textit{é a freqüência fundamental}$$

$$\therefore \textit{Há periodicidade para qualquer valor de } \omega_0$$

Sinais Exponenciais e Senoidais Contínuos

$$Caso\ 2:\ \alpha\ imaginário\ puro:\ x(t) = Ce^{\alpha t},\ C = 1\ e\ \alpha = j\omega_0 \rightarrow x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

RELAÇÃO DE EULER? $e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)$

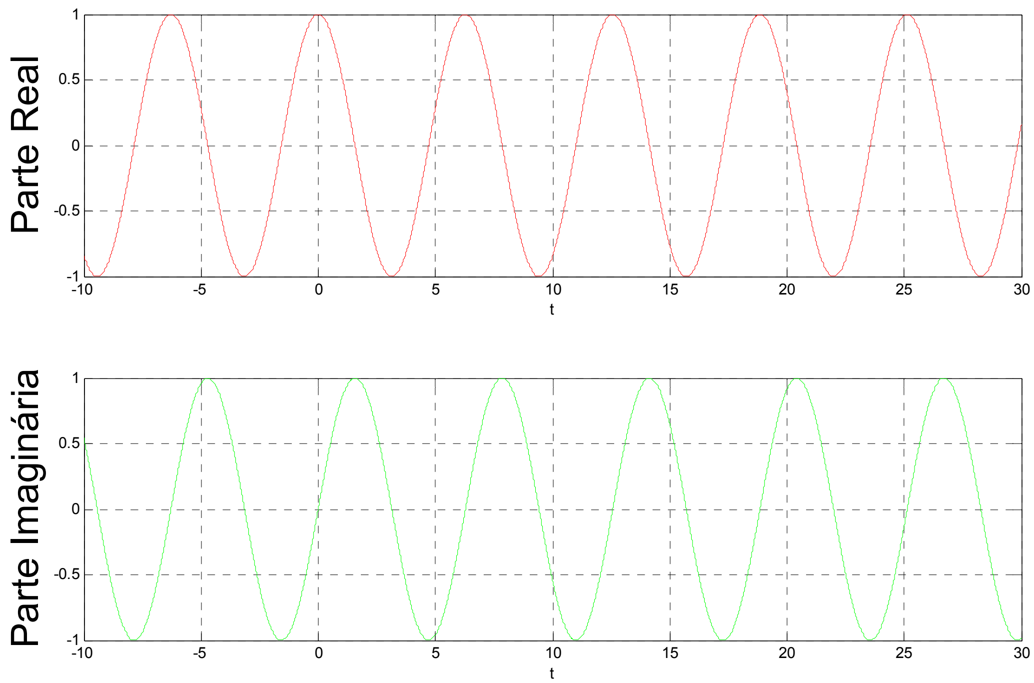
$$Ce^{j\omega_0 t} = C\cos(\omega_0 t) + jC\sin(\omega_0 t)$$

$$C\cos(\omega_0 t + \phi) = C\,\mathrm{Re}\{e^{j(\omega_0 t + \phi)}\}$$
$$C\sin(\omega_0 t + \phi) = C\,\mathrm{Im}\{e^{j(\omega_0 t + \phi)}\}$$

A PARTE REAL É UMA COSSENÓIDE, E A PARTE IMAGINÁRIA É UMA SENOÍDE...

Sinais Exponenciais e Senoidais Contínuos

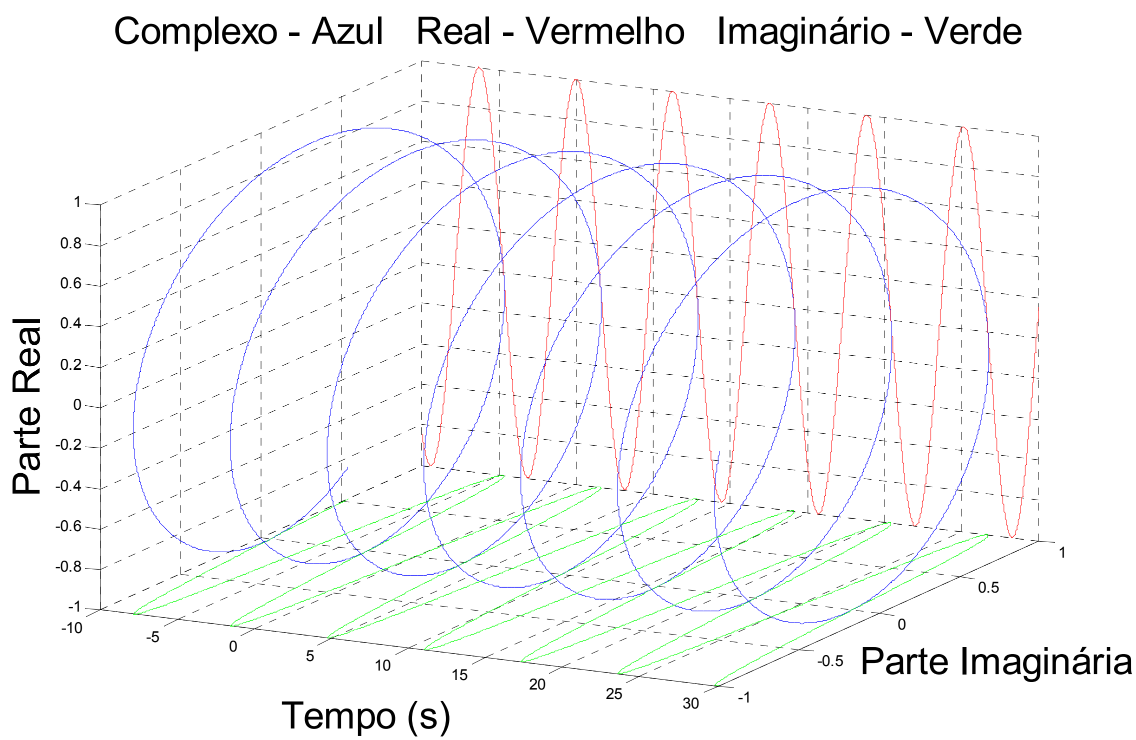
$$Caso\ 2:\ x(t) = Ce^{\alpha t},\ C = 1\ e\ \alpha = j\omega_0 \rightarrow x(t) = e^{j\omega_0 t}$$



Script em Matlab: M_4_SinaisFundamentosProg2.m

Sinais Exponenciais e Senoidais Contínuos

$$Caso\ 2:\ x(t) = Ce^{\alpha t},\ C = 1\ e\ \alpha = j\omega_0 \rightarrow x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

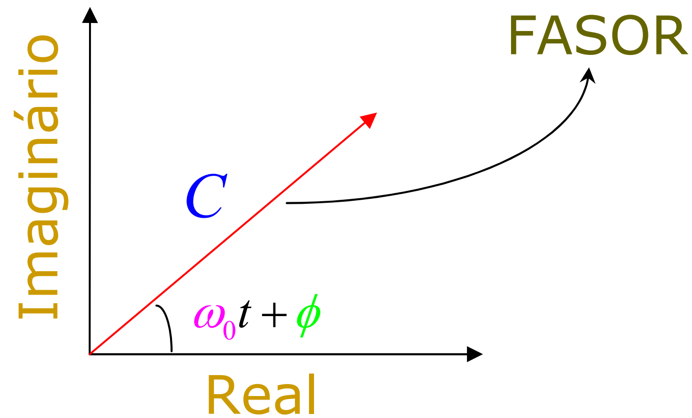


Script em Matlab: M_4_SinaisFundamentosProg2.m

Sinais Exponenciais e Senoidais Contínuos

$$\underbrace{Ce^{j(\omega_0 t+\phi)}}_{\text{Forma Polar}} = \underbrace{C\cos(\omega_0 t+\phi) + jC\sin(\omega_0 t+\phi)}_{\text{Forma Retangular}}$$

$$x(t) = Ce^{j(\omega_0 t+\phi)}$$

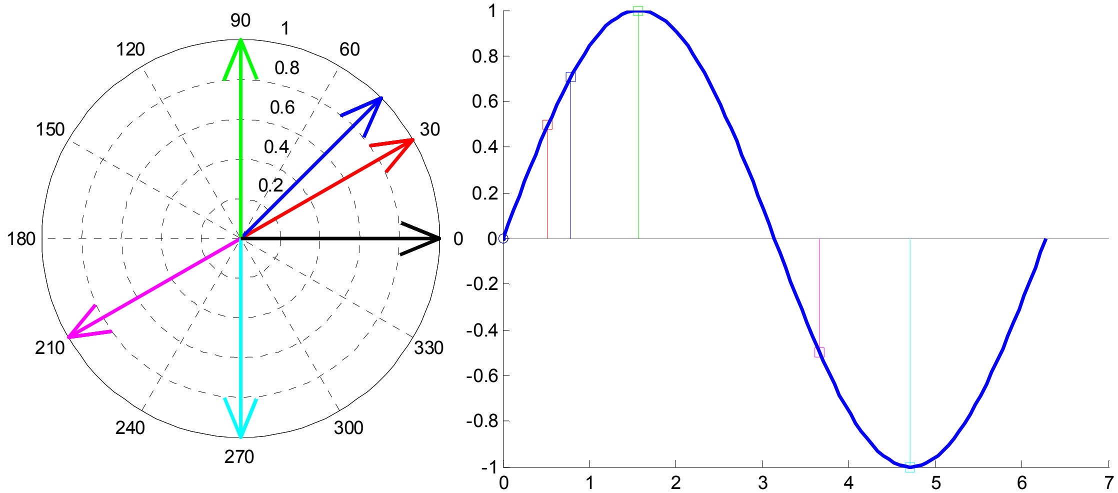


O que acontece com o fasor com o passar do tempo, considerando freqüência positiva?

Vejamos uma animação em Java...

Conjuntos de Números e Equações

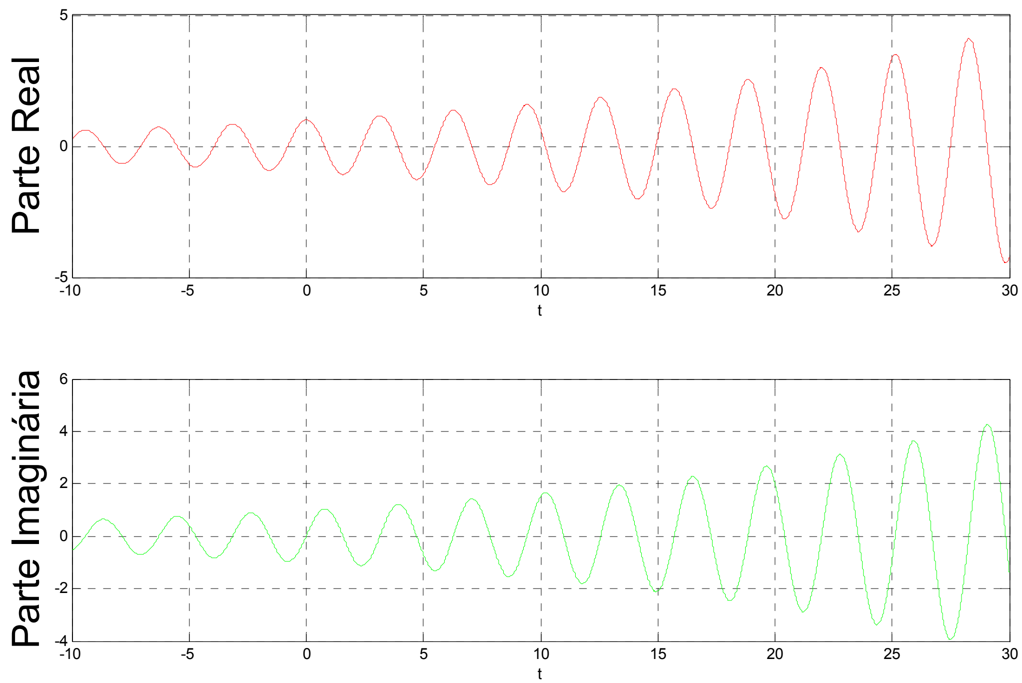
- Um sinal senoidal com freqüência constante é obtido com a projeção no eixo vertical do vetor que descreve um movimento circular uniforme.



É importante entender e visualizar a função senoidal como sendo um sinal, e não apenas como uma relação proporcional entre os lados de um triângulo!

Sinais Exponenciais e Senoidais Contínuos

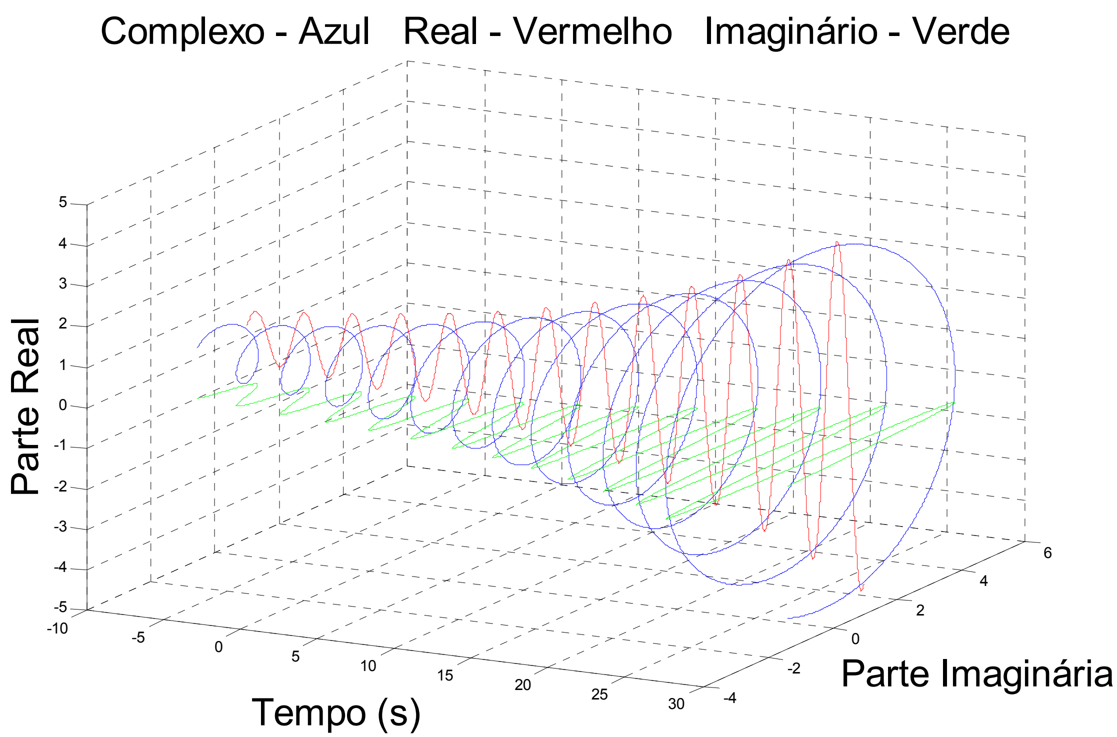
$$Caso\ 3:\ x(t) = Ce^{\alpha t},\ C = 1\ \ e\ \ \alpha = 0.05 + 2j \rightarrow x(t) = e^{(0.05+2j)t}$$



Script em Matlab: M_4_SinaisFundamentosProg3.m

Sinais Exponenciais e Senoidais Contínuos

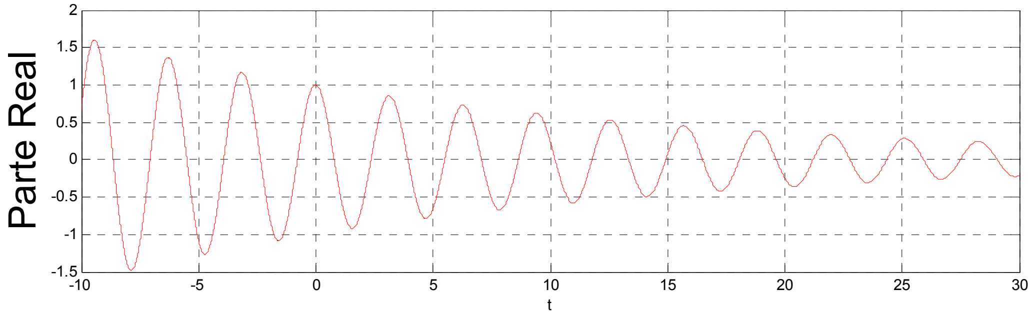
$$Caso\ 3:\ x(t) = Ce^{\alpha t},\ C = 1\ \ e\ \alpha = 0.05 + 2j \rightarrow x(t) = e^{(0.05+2j)t}$$

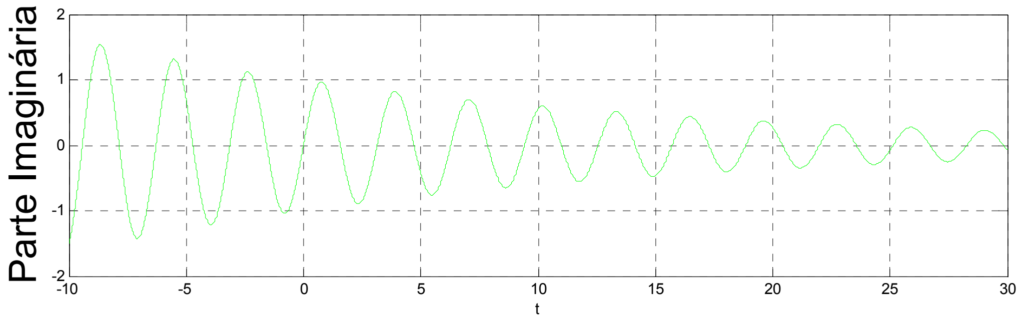


Script em Matlab: M_4_SinaisFundamentosProg3.m

Sinais Exponenciais e Senoidais Contínuos

$$Caso\ 3:\ x(t) = Ce^{\alpha t},\ C = 1\ \ e\ \alpha = -0.05 + 2j \rightarrow x(t) = e^{(-0.05+2j)t}$$

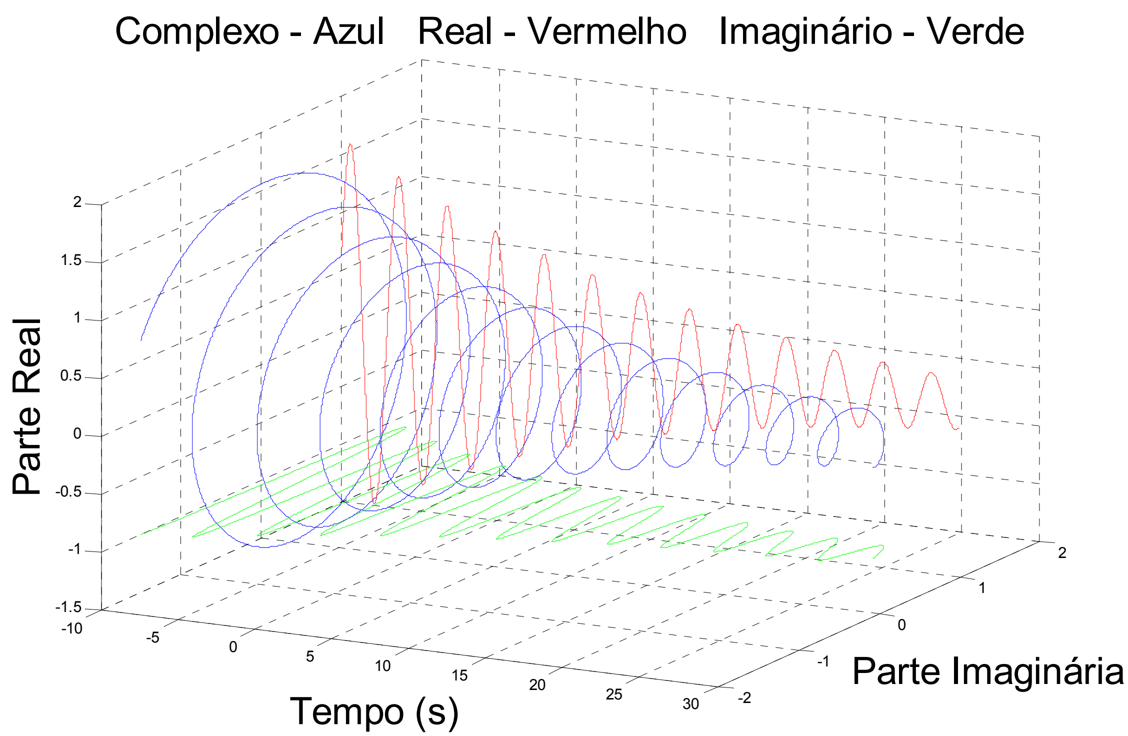




Script em Matlab: M_4_SinaisFundamentosProg4.m

Sinais Exponenciais e Senoidais Contínuos

$$Caso\ 3:\ x(t) = Ce^{\alpha t},\ C = 1\ \ e\ \alpha = -0.05 + 2j \rightarrow x(t) = e^{(-0.05+2j)t}$$



Script em Matlab: M_4_SinaisFundamentosProg4.m

Sinais Exponenciais e Senoidais Discretos

$$x[n] = C(e^{\beta})^n = C\alpha^n, \text{ onde } C \text{ e } \alpha \text{ são números complexos e } \alpha = e^{\beta}$$

- Casos a serem considerados:

$$Caso\ 1: C \text{ e } \alpha \text{ são números reais} \rightarrow EXPONENCIAL\ REAL$$

$$Caso\ 2: \beta \text{ é puramente imaginário}: |\alpha| = 1 \rightarrow EXPONENCIAL\ COMPLEXA\ PERIÓDICA$$

$$Caso\ 3: C \text{ e } \alpha \text{ são complexos}$$

$$\downarrow$$

OS CASOS 2 E 3 SÃO PERFEITAMENTE ANÁLOGOS AOS EQUIVALENTES CONTÍNUOS!!!

Sinais Exponenciais e Senoidais Discretos

$$Caso\ 1:\ x[n] = C(e^{\beta})^n = C\alpha^n,\ C\ \ e\ \alpha\ são\ números\ reais$$

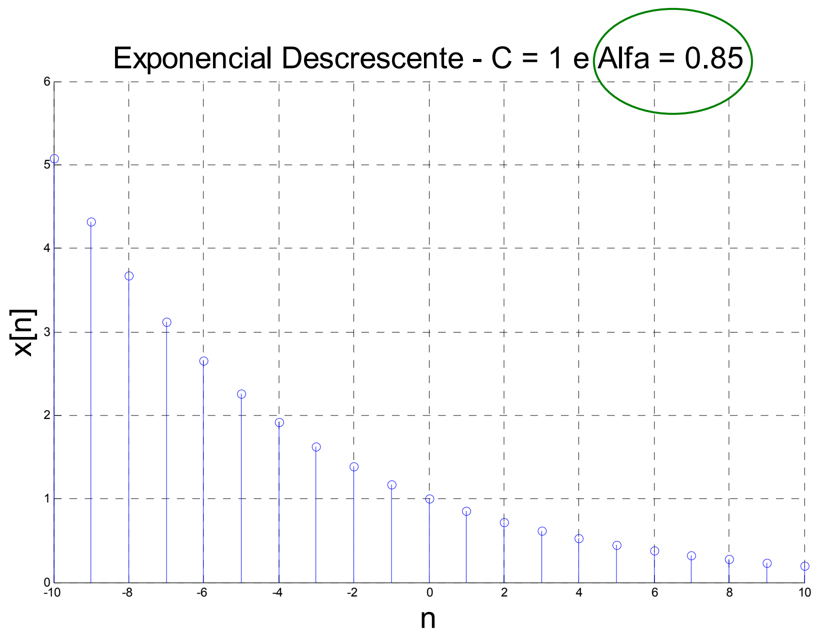
$$|\alpha| > 1:\ crescente$$

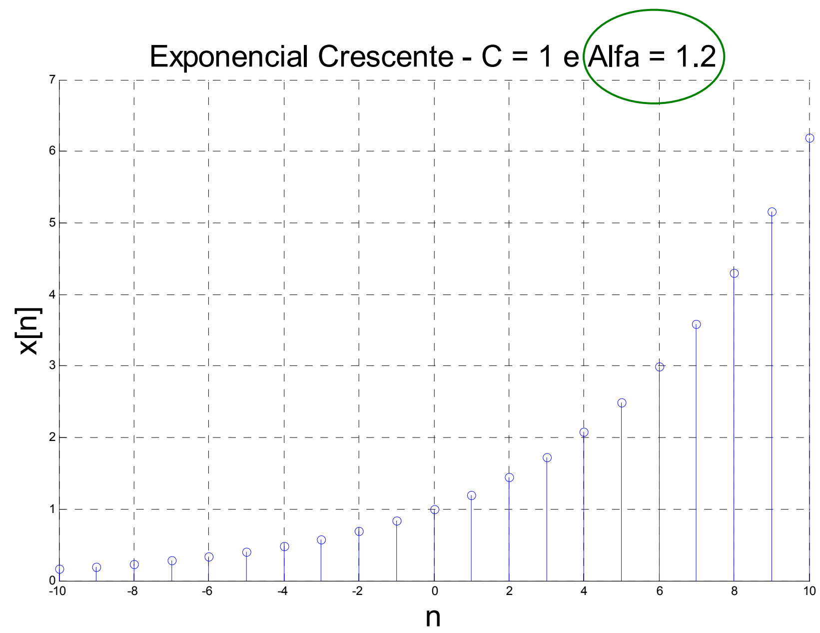
$$|\alpha| < 1:\ decrescente$$

Se α é negativo, há alternância de sinal.

Sinais Exponenciais e Senoidais Discretos

$$x[n] = C(e^{\beta})^n = C\alpha^n, \; C \; e \; \alpha \; são \; números \; reais$$

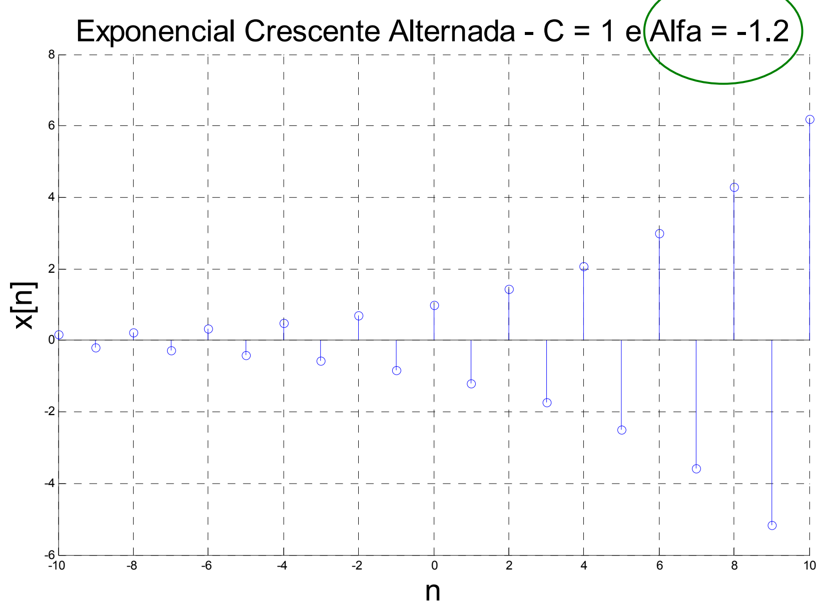


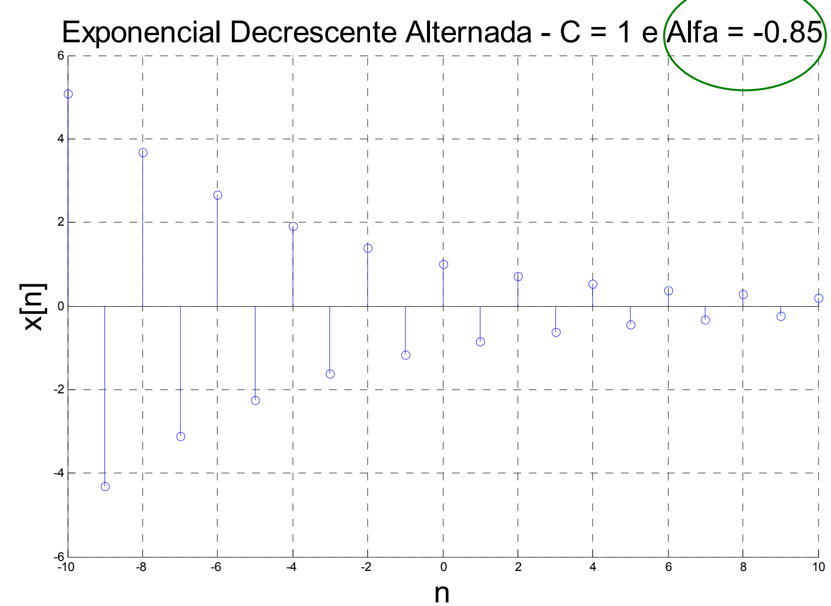


Script em Matlab: M_4_SinaisFundamentosProg5.m

Sinais Exponenciais e Senoidais Discretos

$$x[n] = C(e^{\beta})^n = C\alpha^n, \; C \;\; e \;\; \alpha \;\; são \; números \; reais$$

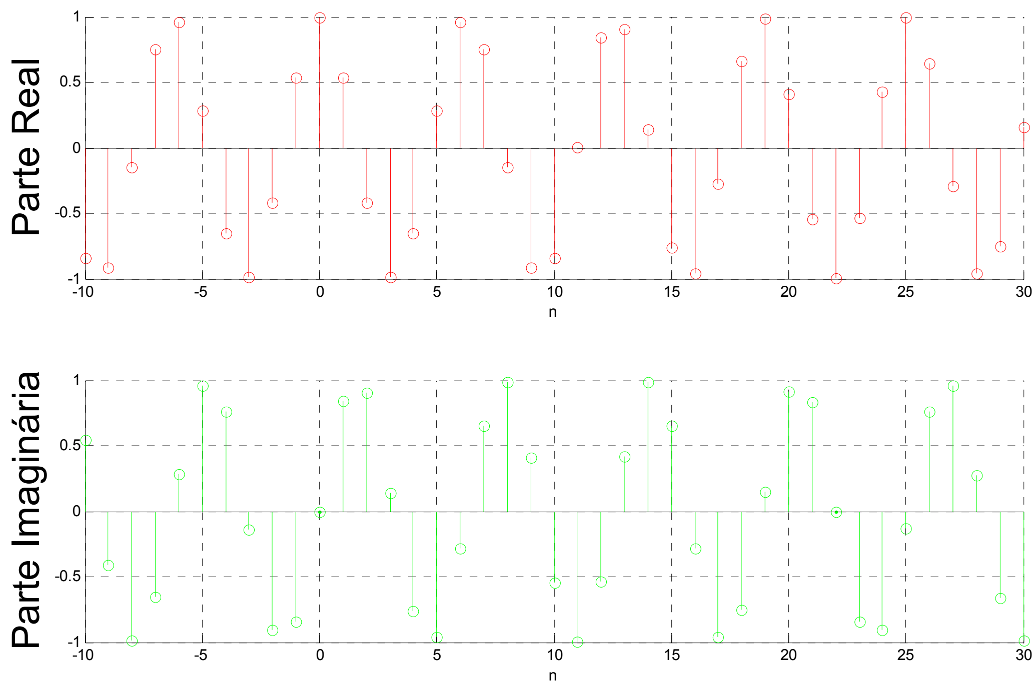




Script em Matlab: M_4_SinaisFundamentosProg5.m

Sinais Exponenciais e Senoidais Discretos

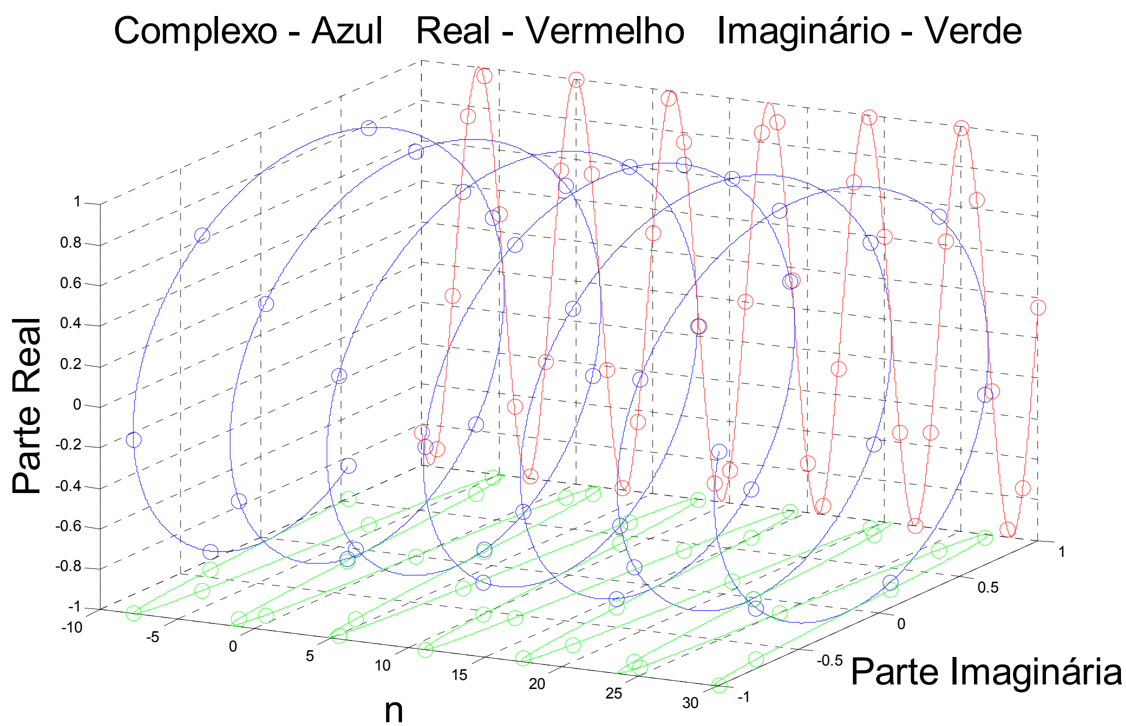
$$Caso\ 2:\ x[n] = Ce^{\alpha n},\ C = 1\ e\ \alpha = j\omega_0 \rightarrow x[n] = e^{j\omega_0 n}$$



Script em Matlab: M_4_SinaisFundamentosProg6.m

Sinais Exponenciais e Senoidais Discretos

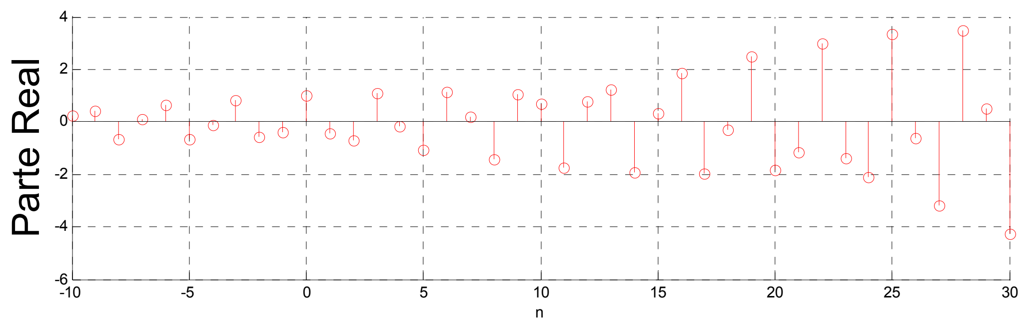
$$Caso\ 2: x[n] = Ce^{\alpha n},\ C = 1\ e\ \alpha = j\omega_0 \rightarrow x[n] = e^{j\omega_0 n}$$

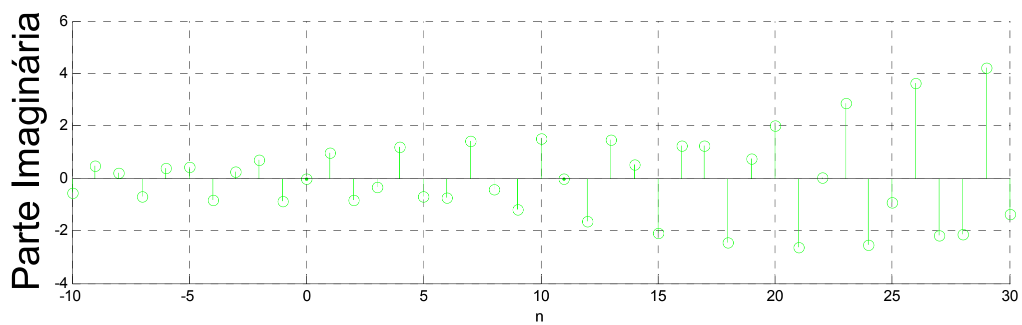


Script em Matlab: M_4_SinaisFundamentosProg6.m

Sinais Exponenciais e Senoidais Discretos

$$Caso\ 3:\ x[n] = Ce^{\alpha n},\ C = 1\ \ e\ \ \alpha = 0.05 + 2j \rightarrow x[n] = e^{(0.05+2j)n}$$

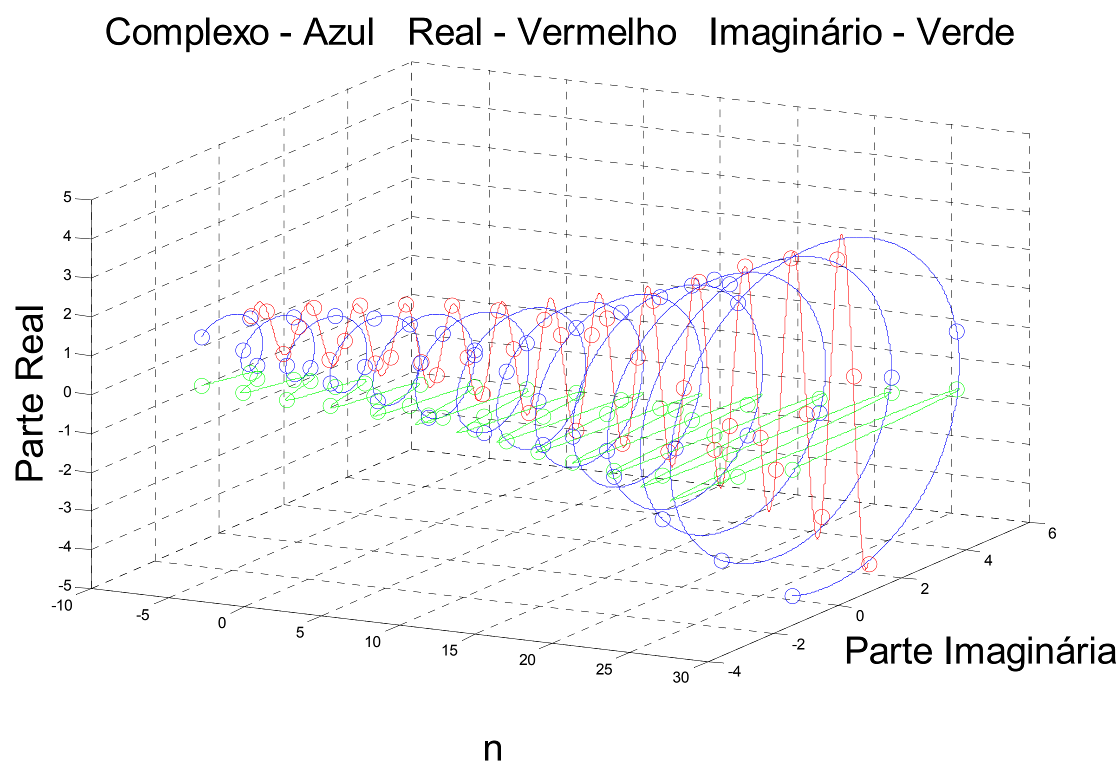




Script em Matlab: M_4_SinaisFundamentosProg7.m

Sinais Exponenciais e Senoidais Discretos

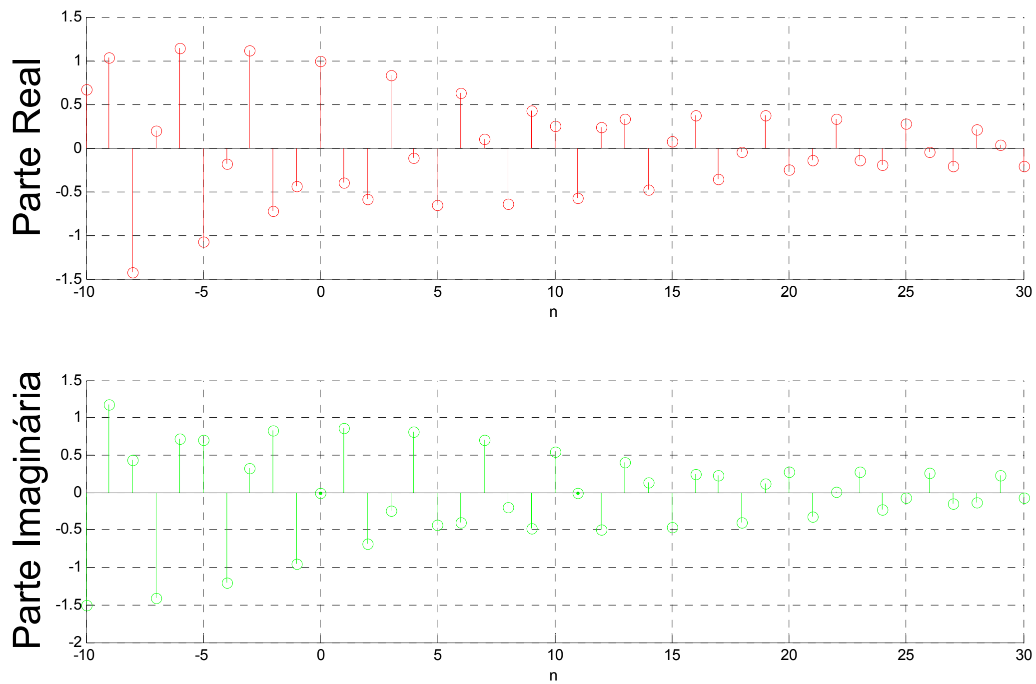
$$Caso\ 3:\ x[n] = Ce^{\alpha n},\ C = 1\ \ e\ \ \alpha = 0.05 + 2j \rightarrow x[n] = e^{(0.05+2j)n}$$



Script em Matlab: M_4_SinaisFundamentosProg7.m

Sinais Exponenciais e Senoidais Discretos

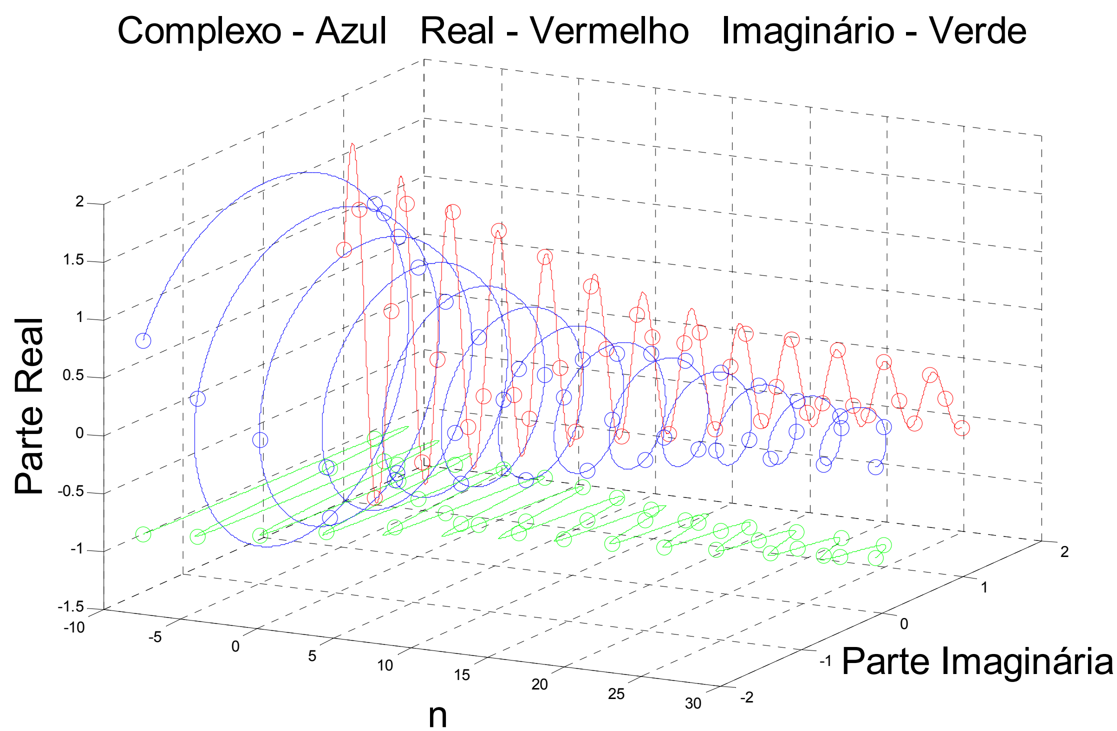
$$Caso\ 3:\ x[n] = Ce^{\alpha n},\ C = 1\ \ e\ \ \alpha = -0.05 + 2j \rightarrow x[n] = e^{(-0.05+2j)n}$$



Script em Matlab: M_4_SinaisFundamentosProg8.m

Sinais Exponenciais e Senoidais Discretos

$$Caso\ 3:\ x[n] = Ce^{\alpha n},\ C = 1\ \ e\ \ \alpha = -0.05 + 2j \rightarrow x[n] = e^{(-0.05+2j)n}$$



Script em Matlab: M_4_SinaisFundamentosProg8.m

Sinais Exponenciais e Senoidais Discretos

$$e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j2\pi n}e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n}$$

Exponenciais nas freqüências ω_0 e $\omega_0 + 2\pi$ são iguais...

$$e^{j(\omega_0+2k\pi)n} = e^{j2k\pi n}e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

SÓ É NECESSÁRIO SER CONSIDERADO NA FREQÜÊNCIA UM INTERVALO DE TAMANHO 2π, USUALMENTE:

$$0 \le \omega_0 < 2\pi, \quad -\pi \le \omega_0 < \pi$$

Sinais Exponenciais e Senoidais Discretos

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}, \; C = 1 \; e \; \beta = j\omega_0$$

O SINAL É PERIÓDICO? $e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 (n+N)} = e^{j\omega_0 n} e^{j\omega_0 N}$

$e^{j\omega_0 N} = 1$ ⟹ CONDIÇÃO DE PERIODICIDADE

$$\omega_0 N = 2\pi m \qquad \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

$\dfrac{\omega_0}{2\pi}$ DEVE SER RACIONAL PARA O SINAL SER PERIÓDICO

Harmônicos – Caso Contínuo

- Condição de periodicidade: $e^{j\omega T_0} = 1$

$e^{j\omega T_0} = 1,\ \omega T_0 = 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

FREQÜÊNCIA FUNDAMENTAL: $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$

- O conjunto de exponenciais complexas com freqüências que são múltiplas da freqüência fundamental é chamado de conjunto de harmônicos: $\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Cada harmônica tem freqüência fundamental $|k|\,\omega_0$
e período fundamental $T_0 / |k|$

HÁ INFINITAS HARMÔNICAS DISTINTAS!!!

Harmônicos – Caso Discreto

- Analogamente ao caso contínuo:

$$\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

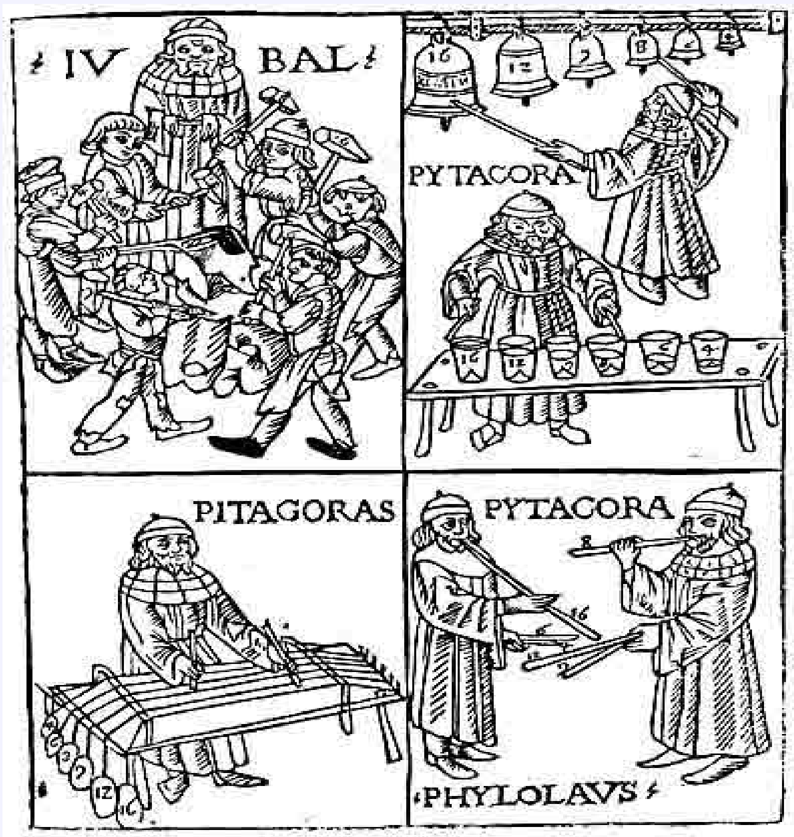
$$\phi_{k+N}[n] = e^{j(k+N)(2\pi/N)n} = e^{jk(2\pi/N)n} e^{j2\pi n} = \phi_k[n]$$

HÁ N HARMÔNICAS DISTINTAS!!!

A Harmonia da Natureza

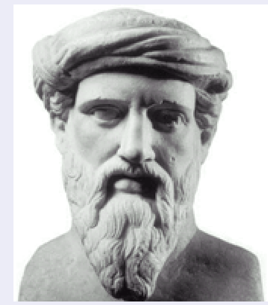
- O conceito de Sinal Harmônico está relacionado com o Movimento Circular Uniforme em que a velocidade de rotação é constante.
- A natureza é harmônica: um grande número de processos naturais exibem movimentos harmônicos simples.

A Harmonia da Natureza



Os pitagorianos pregavam que sons harmoniosos são produzidos na proporção

$$\frac{n}{n+1},\ n = 1, 2, 3 \cdots$$

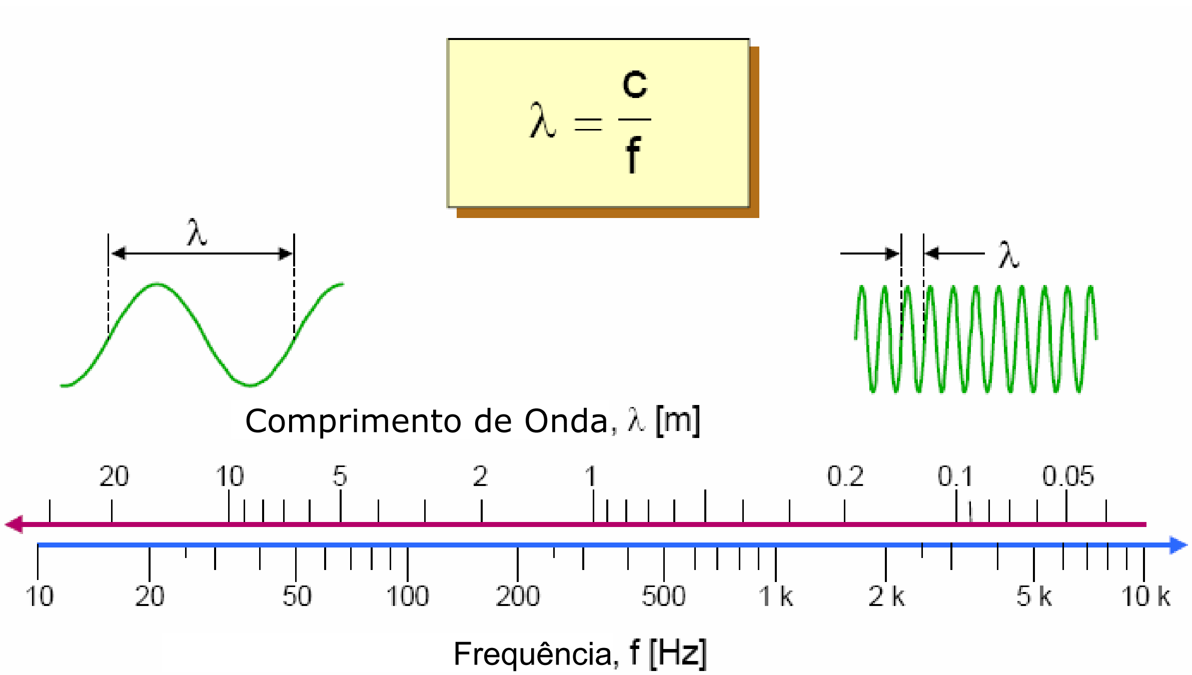


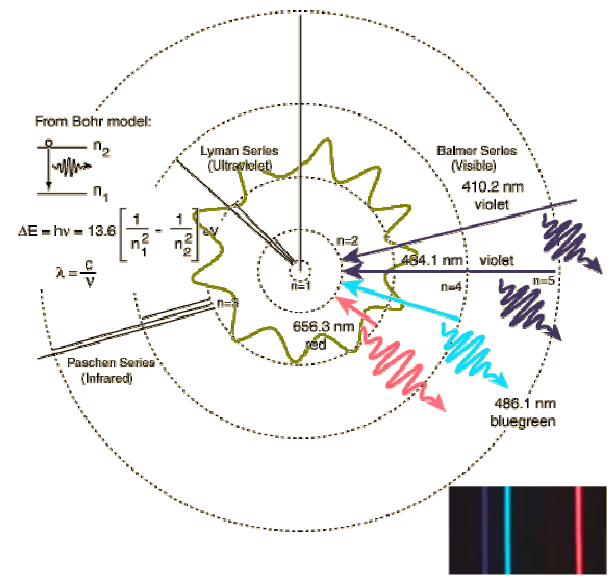
Pitágoras
(580-500 A.C.)

Ilustração medieval de experimentos atribuídos a Pitágoras na busca de notas musicais harmoniosas. Nota-se a produção de dois sons espaçados uma Oitava: proporção 1:2.

A Harmonia da Natureza

- Os sinais senoidais e harmônicos são usados para descrever a essência da matéria e energia no modelo de um átomo!





Linhas espectrais do átomo de Hidrogênio.

$$E = hf$$

Exponencial Complexa Contínua x Discreta

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
Sinais diferentes para cada valor de ω_0.	Sinais idênticos para valores de ω_0 separados por múltiplos de 2π.
Periódico para todo ω_0.	Periódico se $\omega_0/2\pi$ é racional.
Freqüência fundamental ω_0.	Freqüência fundamental ω_0/m, M e N sem fatores em comum.
Período fundamental indefinido para $\omega_0=0$ e igual a $2\pi/\omega_0$ caso contrário.	Período fundamental indefinido para $\omega_0=0$ e igual a $m(2\pi/\omega_0)$ caso contrário, M e N sem fatores em comum.

Vejamos uma animação em Java sobre freqüência discreta...

Boa Notícia!

VOCÊS JÁ PODEM FAZER A PRIMEIRA LISTA DE EXERCÍCIOS SUGERIDOS...

Leituras

- Signals and Systems – Capítulo 1: Signals and Systems.
- Sinais e Sistemas – Capítulo 1: Introdução.
- Sinais e Sistemas Lineares – Background; Capítulo 1: Sinais e Sistemas.

OBSERVAÇÃO: AS NOTAS DE AULA NÃO SUBSTITUEM AS LEITURAS!