Controle de Sistemas I

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

Renato Dourado Maia

Faculdade de Ciência e Tecnologia de Montes Claros

Fundação Educacional Montes Claros

Lembrando...

OK!!!

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) \qquad\qquad x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$h(t),\ h[n]$ $\Rightarrow$ Resposta do sistema quando a entrada é um impulso unitário, $\delta(t),\ \delta[n]$.

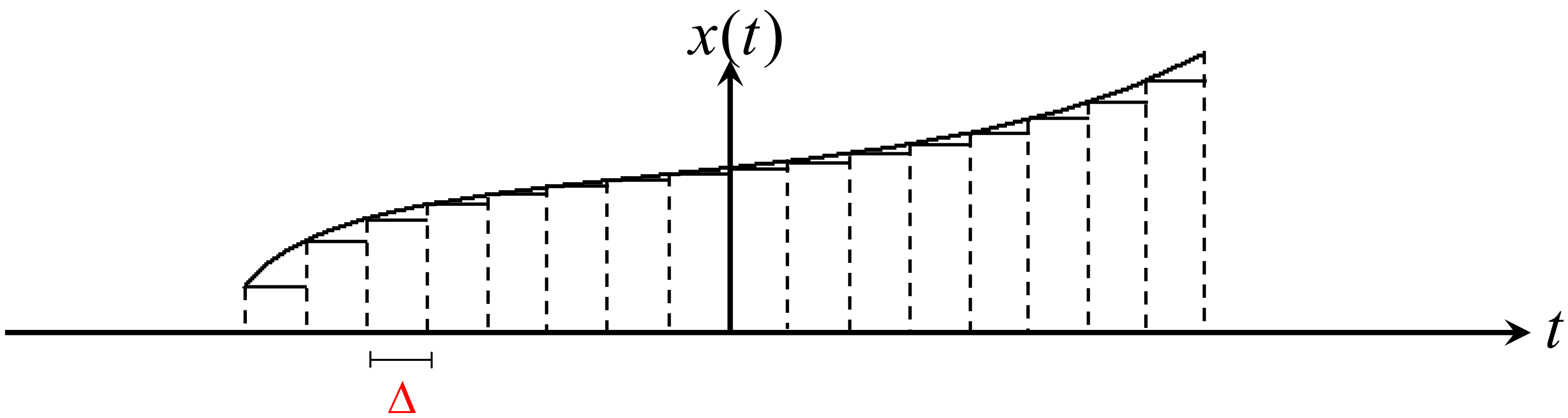
A Resposta ao Impulso caracteriza um sistema LTI: dada uma entrada x, pode-se, conhecendo-se h, determinar-se y. Esse método é denominado convolução.

AGORA VEREMOS O CASO CONTÍNUO!!!

Consideração Importante

- Estudaremos o caso contínuo mais rapidamente, pois todo o raciocínio é análogo àquele desenvolvido para o caso discreto:
  - Inicialmente, será mostrado que sinais contínuos podem ser escritos em termos de impulsos.
  - Em seguida, essa forma alternativa de representar sinais contínuos será utilizada para se determinar a saída de sistemas contínuos lineares invariantes no tempo.
  - Será demonstrado que, tal como no caso discreto, a resposta ao impulso caracteriza por completo um sistema LTI contínuo.

Sinais Contínuos e Soma Impulsos

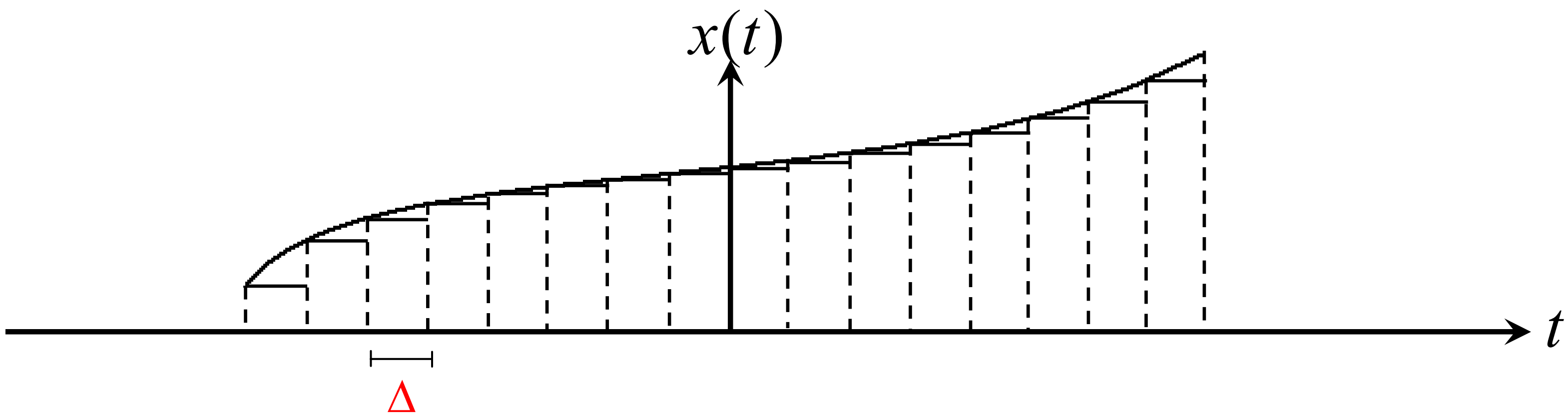


Vamos escrever o sinal x(t) como uma combinação linear de pulsos de largura Δ ?

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} 1/\Delta, & 0 \le t \le \Delta \\ 0, & caso\ contrário \end{cases} \rightarrow \Delta\delta_{\Delta}(t) = 1$$

Pulso de Área Unitária

Sinais Contínuos e Soma Impulsos



$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} 1/\Delta, & 0 \le t \le \Delta \\ 0, & caso\ contrário \end{cases} \rightarrow \quad \Delta\delta_\Delta(t) = 1$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta \longrightarrow$$

Quanto menor o Δ, melhor é a aproximação. Concordam?

O que acontece quando $\Delta \rightarrow 0$?

Sinais Contínuos e Soma Impulsos

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t-k\Delta)\Delta \longrightarrow$$ O que acontece quando $\Delta \to 0$?

Impulso Deslocado

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\ \delta_{\Delta}(t-k\Delta)\Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Peso

x(t) é uma "soma" de impulsos ponderados e deslocados!

Lembremos do Caso Discreto...

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n]*h[n] = h[n]*x[n]$$

Somatório de Convolução

Considerando a LINEARIDADE e a INVARIÂNCIA NO TEMPO, tem-se, analogamente, para o caso contínuo:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Integral de Convolução

$$y(t) = x(t)*h(t) = h(t)*x(t)$$

Integral de Convolução

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \longrightarrow$$

Entrada escrita como "soma" de impulsos ponderados e deslocados...

LINEARIDADE e INVARIÂNCIA NO TEMPO

A saída é uma "soma" ponderada das saídas devidas a cada entrada, ou seja, um somatório de respostas ao impulso deslocadas e ponderadas!!!

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$$

Integral de Convolução - Resumo

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow h(t)$$ $\longrightarrow$ Definição de $h(t)$

$$\delta(t-\tau) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow h(t-\tau)$$ $\longrightarrow$ Invariância no Tempo

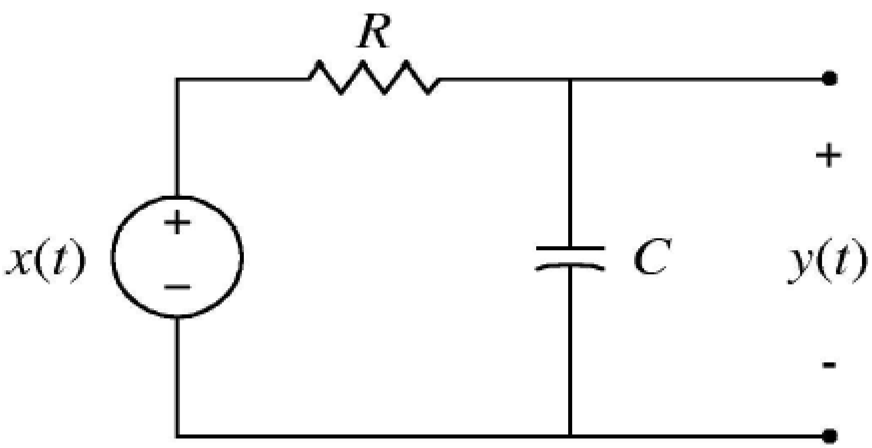
$$x(\tau)\delta(t-\tau) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow x(\tau)h(t-\tau)$$ $\longrightarrow$ Linearidade

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$ $\longrightarrow$ Linearidade

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$ $\longrightarrow$ Definição de $\delta(t)$

Integral de Convolução

Exemplo



Resposta ao Impulso?

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{\frac{-1}{RC}t} u(t)$$

Consideremos três entradas:

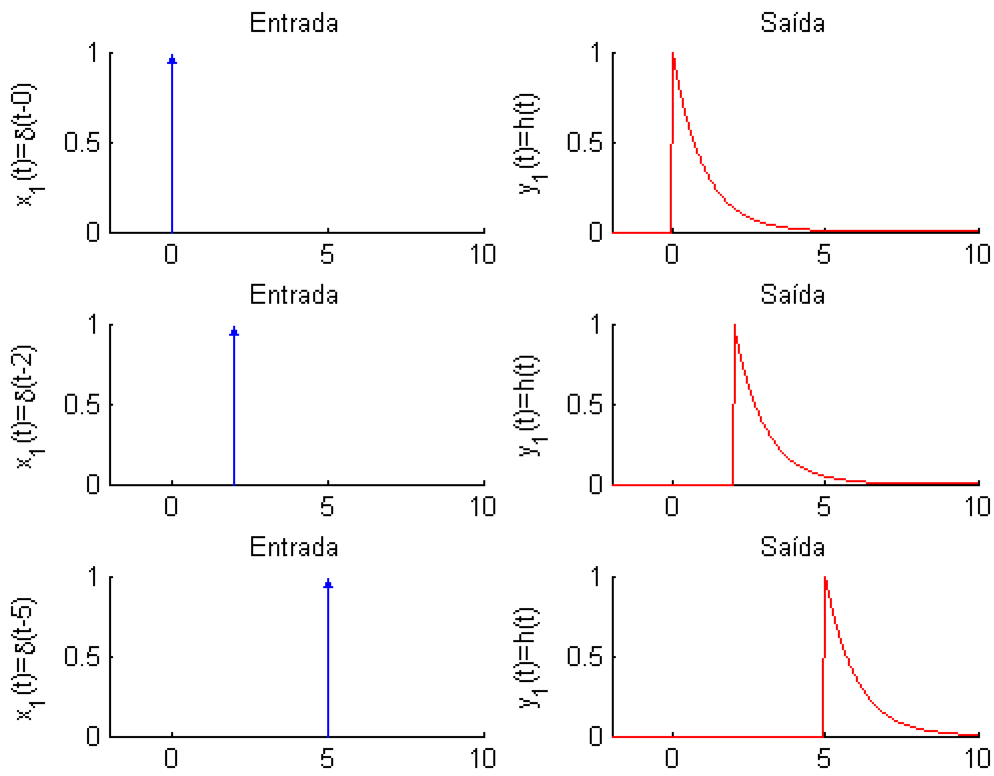
$$x_1(t) = \delta(t) \rightarrow y_1(t) = h(t)$$

$$x_2(t) = \delta(t-2) \rightarrow y_2(t) = h(t-2)$$

$$x_3(t) = \delta(t-5) \rightarrow y_3(t) = h(t-5)$$

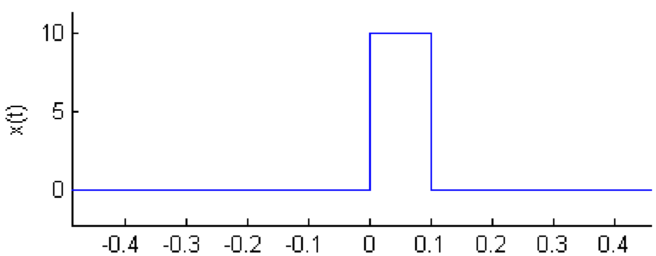
Integral de Convolução

Exemplo: Resposta ao Impulso do Circuito RC (RC = 1)

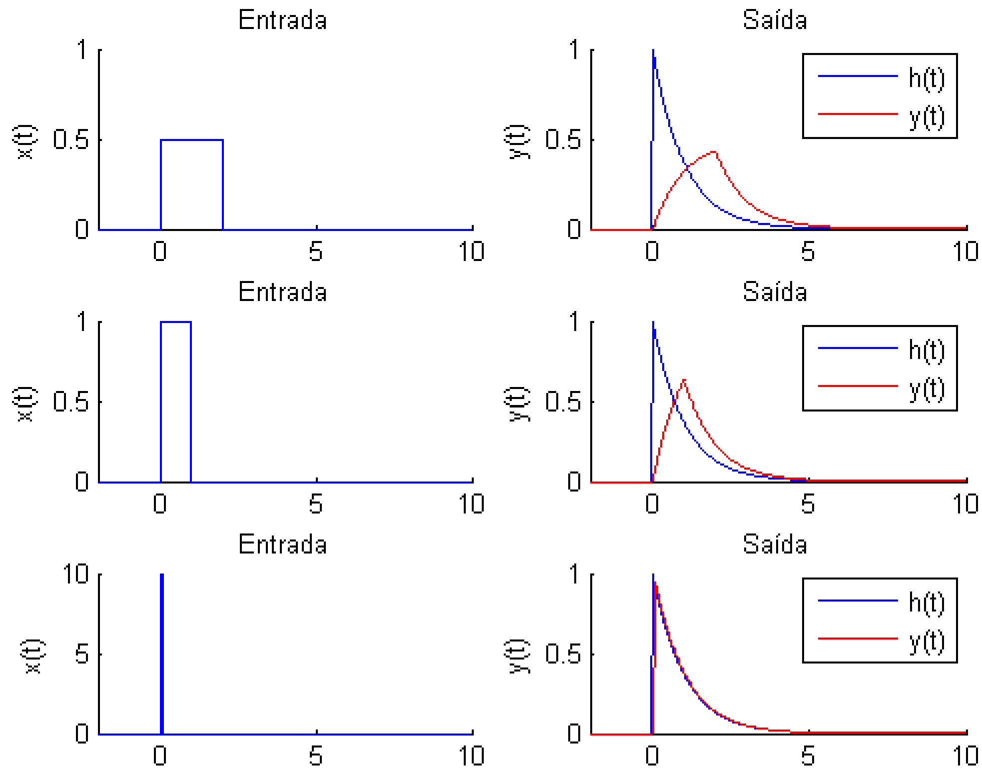


Integral de Convolução

Exemplo: Pulso como Aproximação do Impulso (RC = 1)

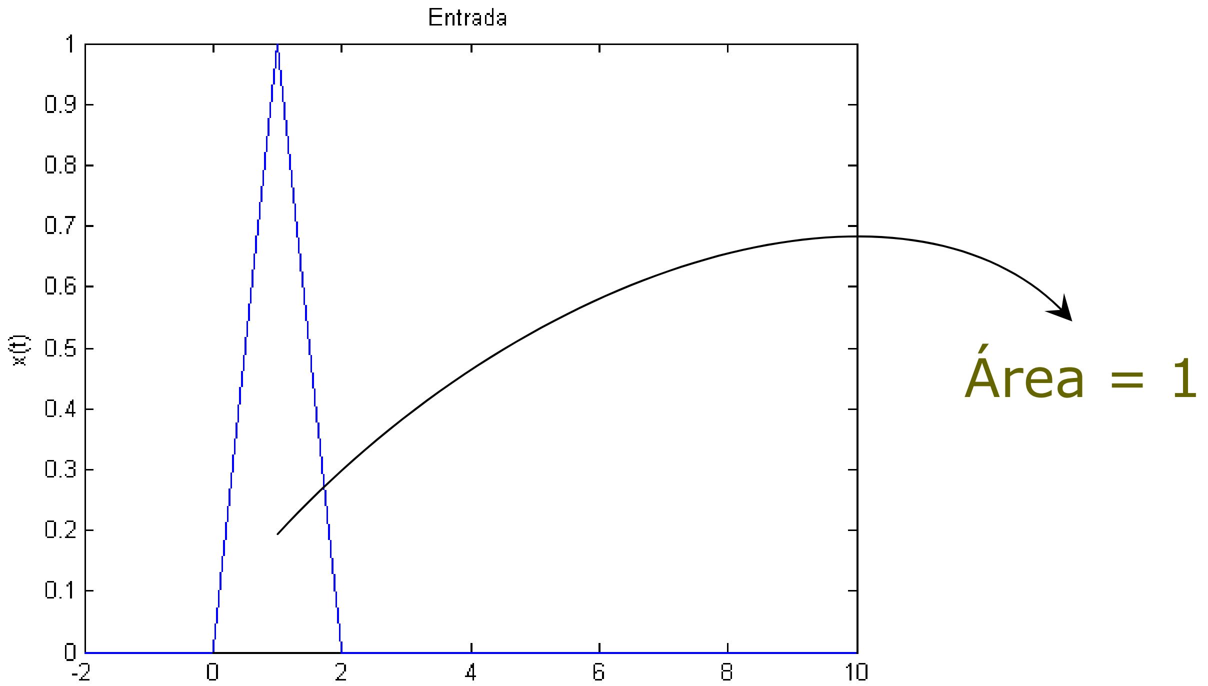


ZOOM



Integral de Convolução

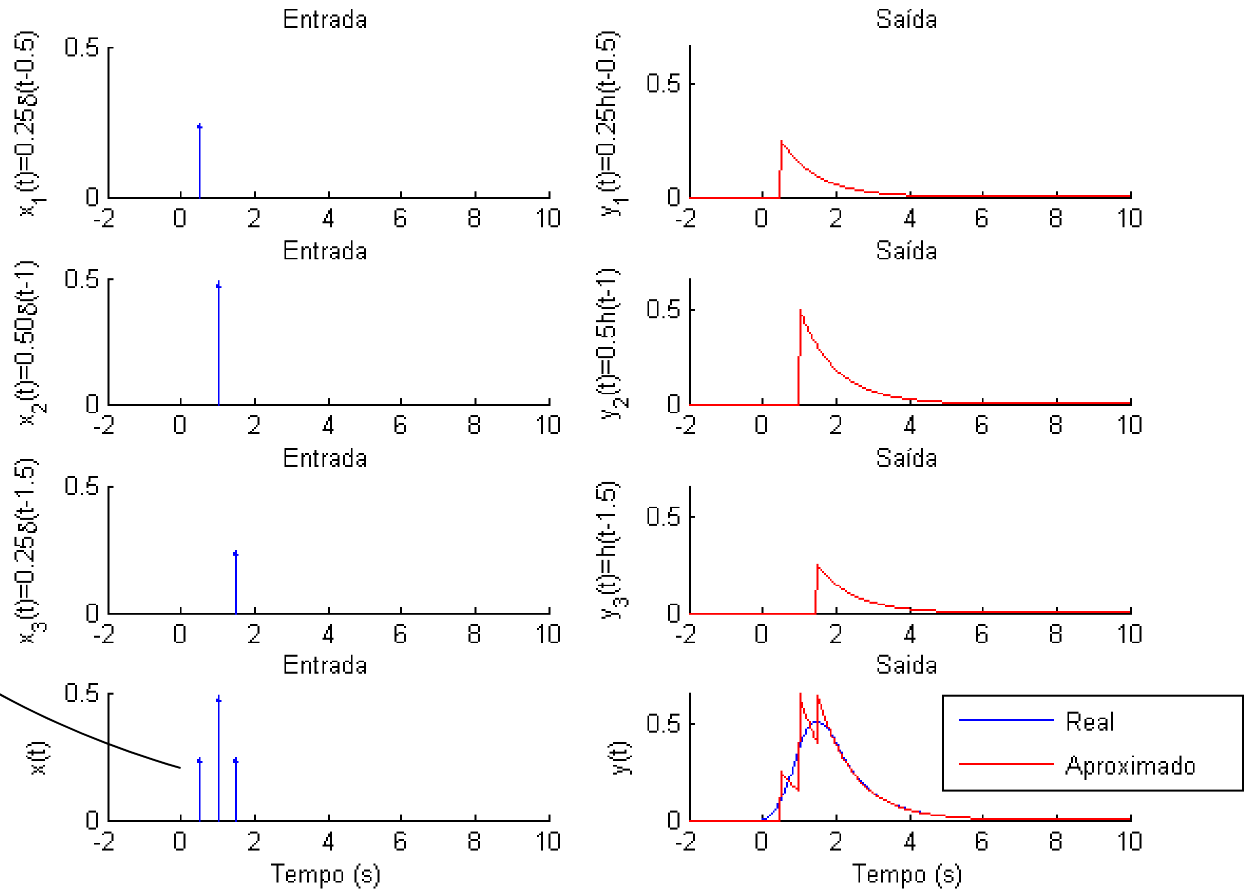
Exemplo: Entrada para o Circuito RC (RC = 1)



Vamos determinar a saída interpretando a entrada como uma "soma" de impulsos ponderados e deslocados?

Integral de Convolução

Área = 1



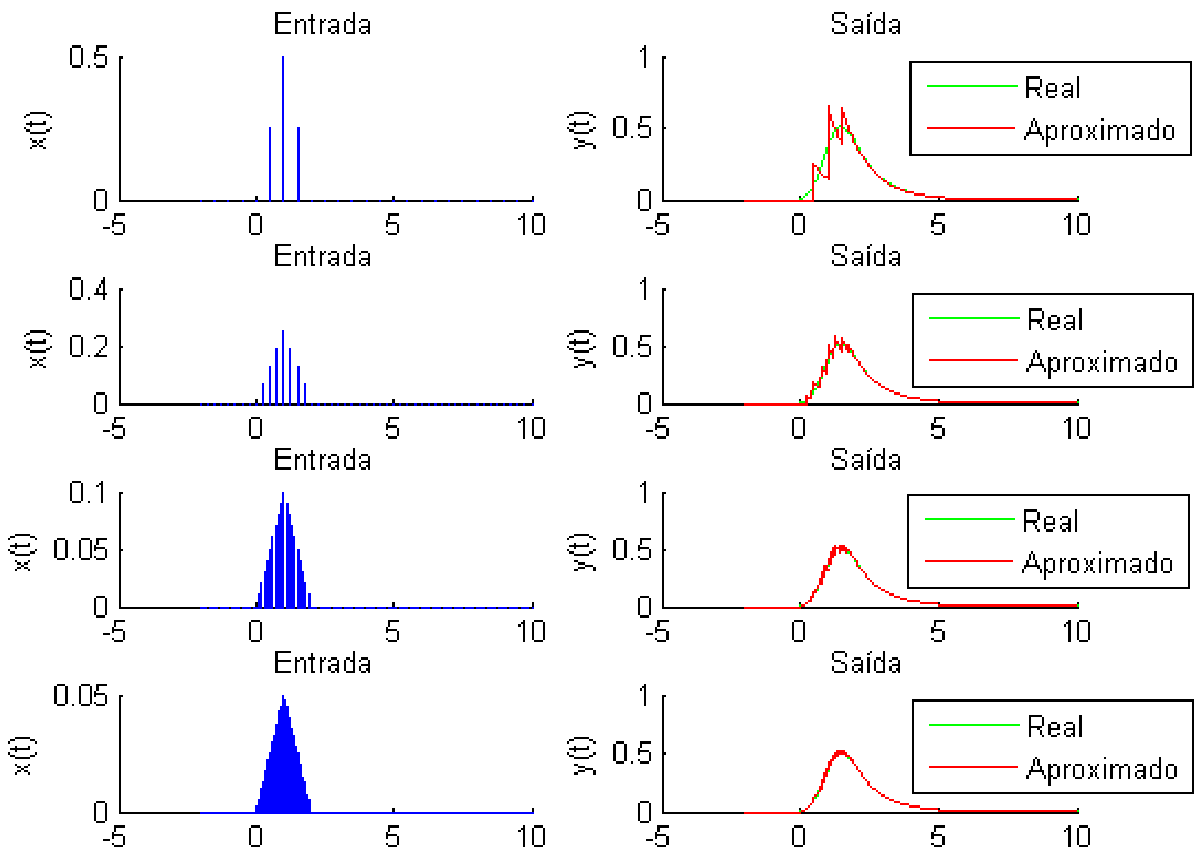
Integral de Convolução

3 impulsos

7 impulsos

19 impulsos

39 impulsos



A entrada foi sempre mantida com a área igual a 1!

Rebate, Desloca, Multiplica...

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n]*h[n] = h[n]*x[n] \Rightarrow$$

Somatório de Convolução

Rebate, desloca, multiplica e soma!

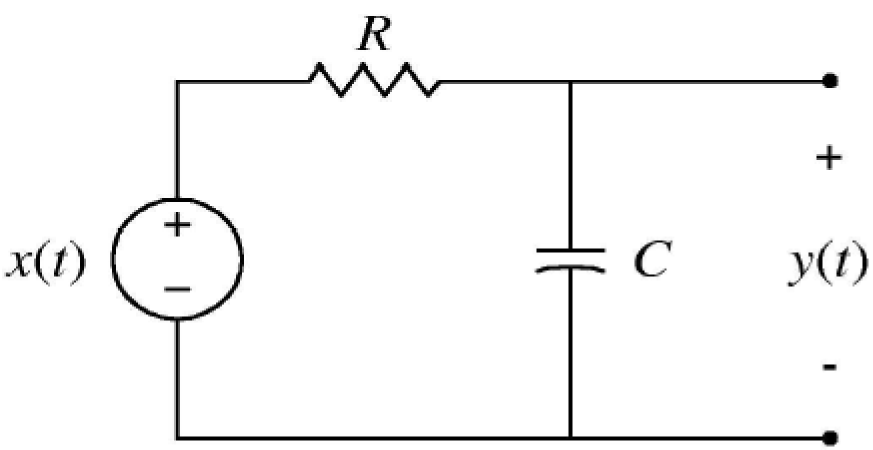
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t)*h(t) = h(t)*x(t) \Rightarrow$$

Integral de Convolução

Rebate, desloca, multiplica e integra!

Integral de Convolução

Exemplo



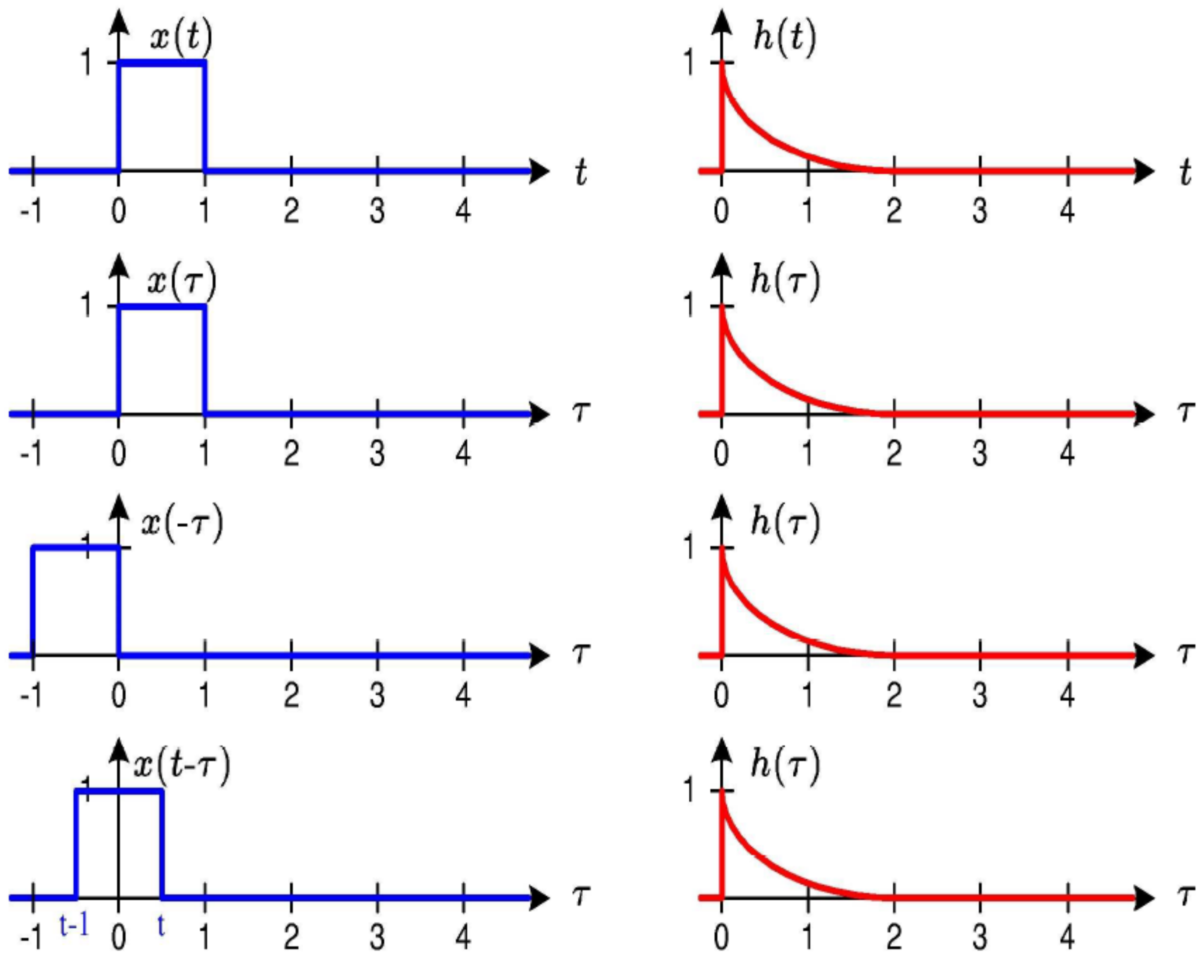
Resposta ao Impulso?

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{\frac{-1}{RC}t} u(t)$$

Determinar a saída para a seguinte entrada:

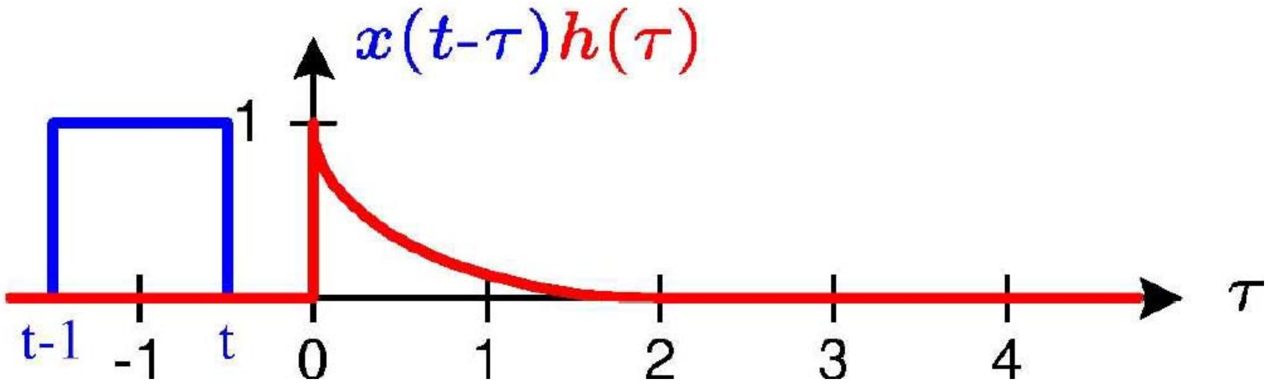
$$x(t) = u(t) - u(t-1)$$

Integral de Convolução



Integral de Convolução

Exemplo: Primeiro Intervalo

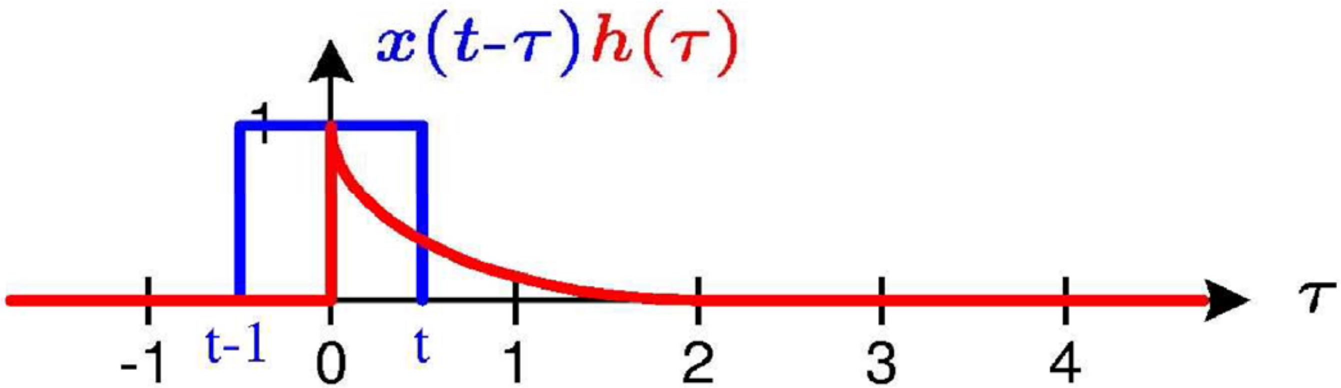


$$y(t) = 0, \; t < 0$$

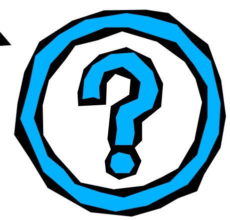
A brincadeira começa em t = 0...

Integral de Convolução

Exemplo: Segundo Intervalo



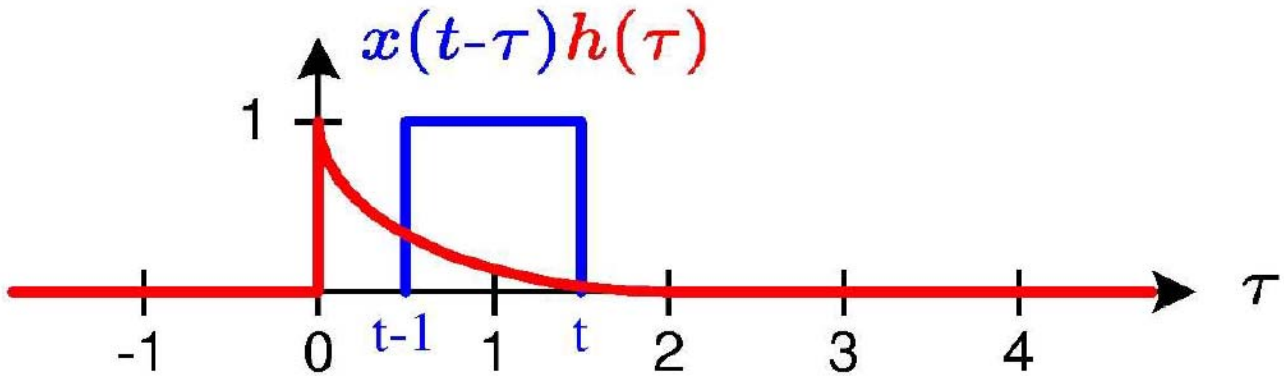
$$y(t)=\int_0^t 1e^{-\tau}d\tau,\ 0\le t\le 1$$



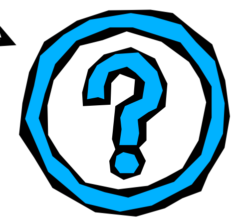
$$y(t)=1-e^{-t},\ 0\le t\le 1$$

Integral de Convolução

Exemplo: Terceiro Intervalo



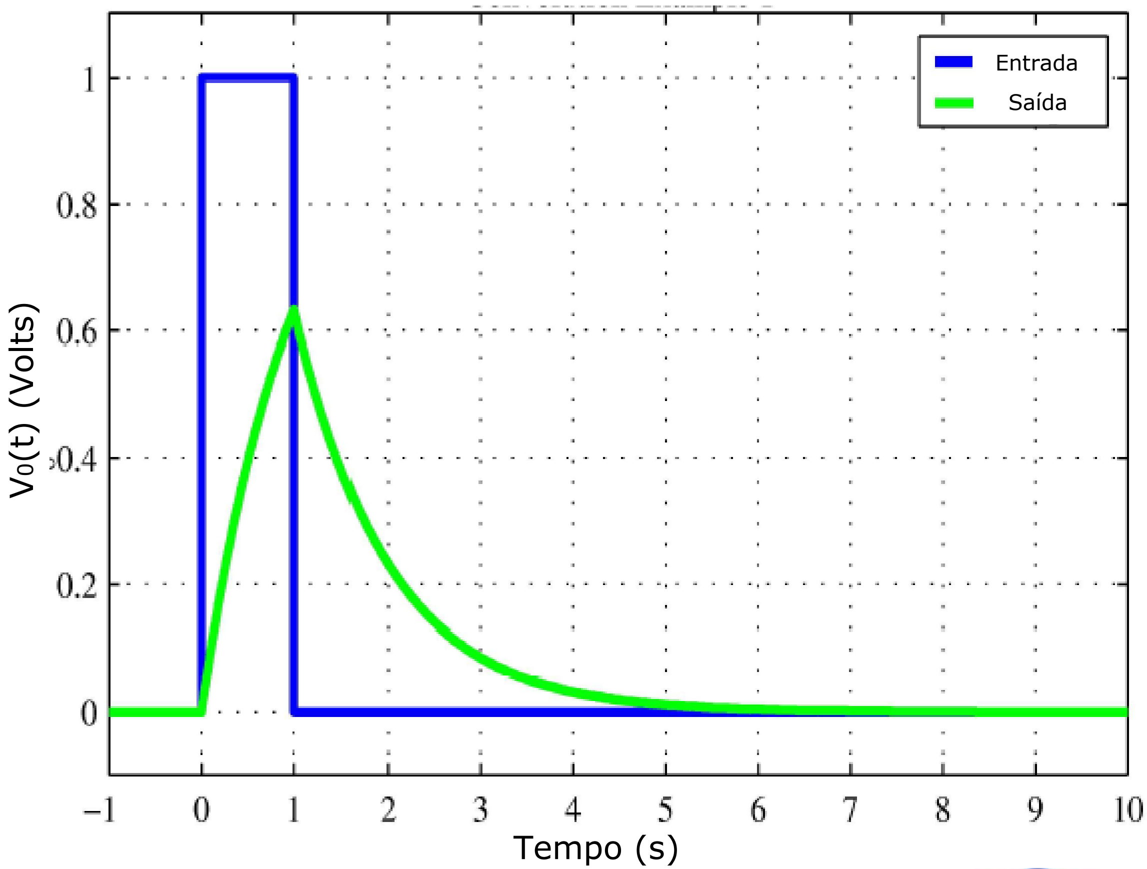
$$y(t) = \int_{t-1}^{t} 1e^{-\tau} d\tau, \; 1 \le t \le \infty$$



$$y(t) = e^{-t+1} - e^{-t}, \; 1 \le t \le \infty$$

Integral de Convolução

Exemplo: Resultado

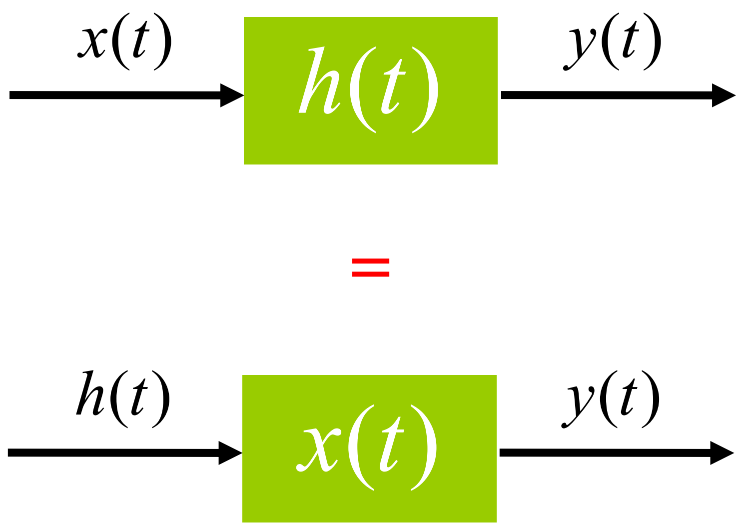


Integral de Convolução

Vamos brincar um pouco com uma animação em Java que ilustra a interpretação rebate, desloca, multiplica e integra...

Propriedades da Convolução

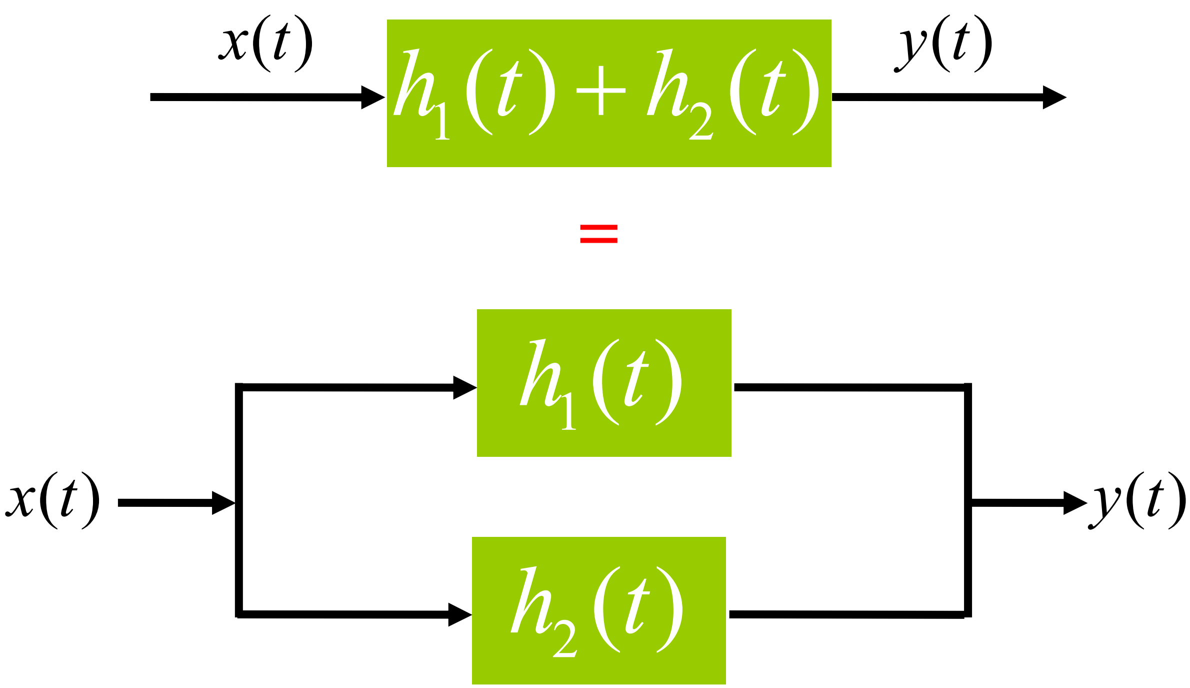
- Comutativa: $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$



Podemos escolher qual sinal será rebatido...

Propriedades da Convolução

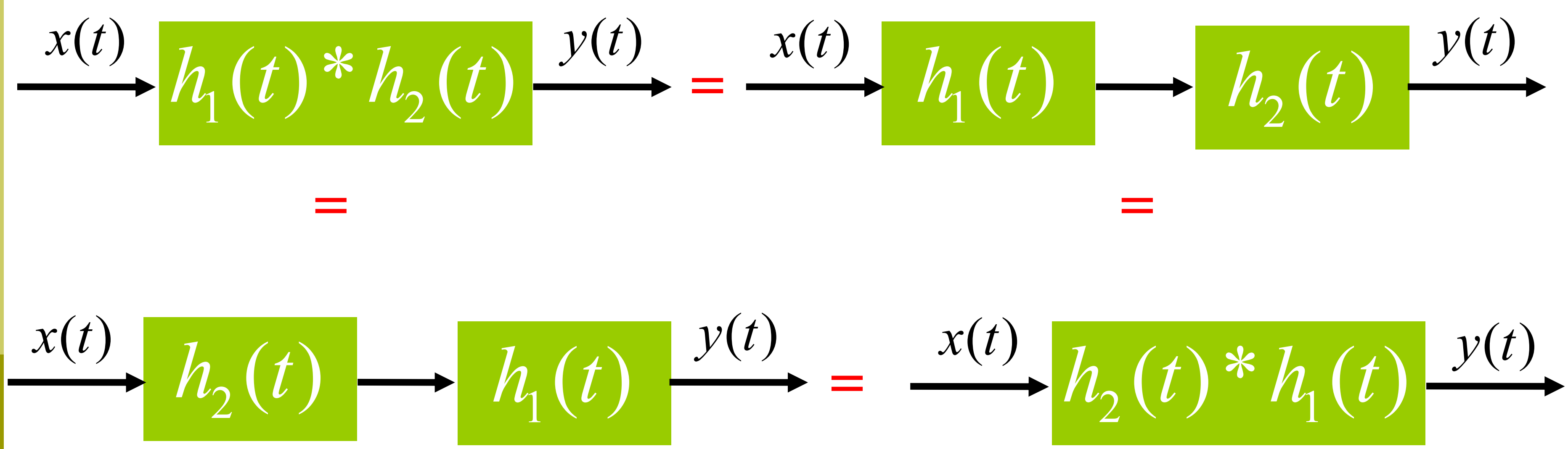
- Distributiva: $x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$



Conexão Paralela de Sistemas – O caso Discreto é Análogo...

Propriedades da Convolução

- Associativa: $(x(t) * h_1(t)) * h_2(t)) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t))$



Conexão em Série (Cascata) de Sistemas – O Caso Discreto é Análogo...

Propriedades da Convolução

- Memória:
  - Num sistema sem memória, a saída num determinado instante depende apenas da entrada nesse mesmo instante:

$$h[n] = 0,\; n \neq 0$$

$$h[n] = k\delta[n],\; k = h[0]$$

Pelo Somatório de Convolução: $y[n] = kx[n]$

O caso contínuo é análogo...

Propriedades da Convolução

- Causalidade:
  - Sistemas causais são aqueles que dependem apenas do presente e/ou do passado:

$$h[n] = 0,\ n < 0 \ \therefore\ h(t) = 0,\ t < 0$$

A integral e o somatório de convolução poderão ter seus limites simplificados:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad \rightarrow \quad \int_{0}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \quad \rightarrow \quad \sum_{0}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

Propriedades da Convolução

- Estabilidade:
  - Sistemas estáveis são aqueles que, para entradas limitadas, geram saídas limitadas. Então, considerando uma entrada limitada, para que um sistema seja estável, sua resposta ao impulso deve ser absolutamente integrável (somável):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| h(\tau) \right| d\tau < \infty$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \left| h[k] \right| < \infty$$

Propriedades da Convolução

- Invertibilidade:
  - Sistemas invertíveis são aqueles em que a entrada pode ser recuperada a partir da saída, isto é, diferentes entradas levam a diferentes saídas:

$$x(t) * (h(t) * h^{-1}(t)) = x(t)$$

Para que a relação acima seja verdadeira, a seguinte condição deve ser obedecida:

$$h(t) * h^{-1}(t) = \delta(t)$$

O caso discreto é análogo...

Resposta ao Degrau

$$s[n] = u[n] * h[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} u[k]h[n-k] = \sum_{-\infty}^{+\infty} h[k]u[n-k]$$

Resposta ao Degrau Unitário
de um Sistema LTI Discreto

$$s[n] = \sum_{-\infty}^{n} h[k]$$

Facilmente, deduz-se a seguinte relação: $h[n] = s[n] - s[n-1]$

E O CASO CONTÍNUO?

Resposta ao Degrau

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$$

Resposta ao Degrau Unitário de um Sistema LTI Discreto

Tal como no caso discreto, há uma relação simples:

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = s^{'}(t)$$

Conclusão: como a resposta ao impulso pode ser recuperada por meio da resposta ao degrau, a resposta ao degrau também caracteriza completamente um sistema LTI contínuo ou discreto.

Integral de Convolução

Exemplo

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \le t < 1 \\ 2, & 1 \le t < 2 \\ 0, & 2 \le t \end{cases} \qquad h(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ 1, & -1 \le t < 1 \\ e^{-t}, & 1 \le t < 3 \\ 0, & 3 \le t \end{cases}$$

Iniciaremos a próxima aula com a análise deste exemplo! Não deixem de tentar resolvê-lo em casa!!!

Educational Matlab GUIs

- Demos sobre Processamento de Sinais: Convolução, Série de Fourier, Transformadas, etc...

http://users.ece.gatech.edu/mcclella/matlabGUIs/index.html

(Acesso em 03/03/2007)

- Vamos brincar um pouco com a Continuous Convolution Demo! ☺